1 次の各問に答えよ。

〔問1〕 $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^3-\dfrac{4}{\sqrt{24}}\div\dfrac{18}{\sqrt{6}-12}$ を計算せよ。

〔問2〕 2次方程式 $\dfrac{(x+1)(x-1)}{4}-\dfrac{(x-2)(2x+3)}{2}=1$ を解け。

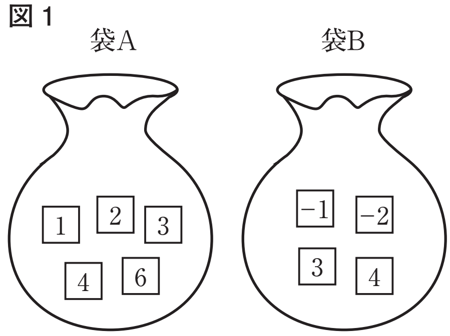
〔問3〕 右の**図1**のように，1，2，3，4，6の数が1つずつ書かれた5枚のカードが入っている袋Aと，−1，−2，3，4の数が1つずつ書かれた4枚のカードが入っている袋Bがある。

2つの袋A，Bから同時にそれぞれ1枚のカードを取り出す。このとき，袋Aから取り出したカードに書かれた数を a，袋Bから取り出したカードに書かれた数を b とする。

$\sqrt{2a+b}$ が自然数になる確率を求めよ。

ただし，2つの袋A，Bそれぞれにおいて，どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする。

図1



〔問4〕 右の**図2**で，点Oは線分ABを直径とする円の中心であり，3点C，D，Eは円Oの円周上にある点である。

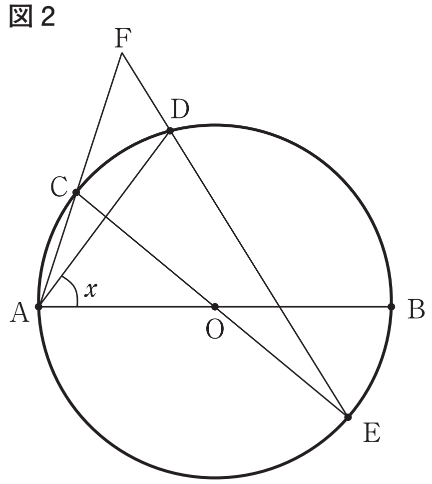
5点A，B，C，D，Eは，**図2**のように，A，C，D，B，Eの順に並んでおり，互いに一致(いっち)せず，3点C，O，Eは一直線上にある。

線分ACをCの方向に延ばした直線と線分EDをDの方向に延ばした直線との交点をFとする。

点Aと点D，点Cと点Eをそれぞれ結ぶ。

∠AFE＝52°，∠CEF＝18°のとき，x で示した∠BADの大きさは何度か。

図2

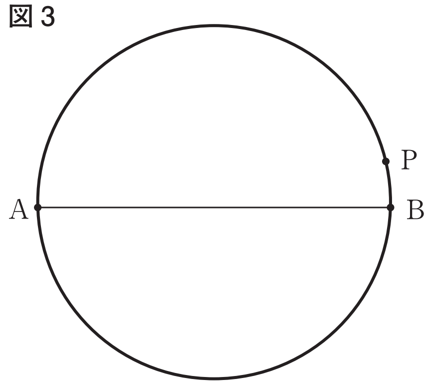


〔問5〕 右の**図3**で，点Pは線分ABを直径とする円の周上にあり，点Aを含(ふく)まない $\overset{\frown}{BP}$ の長さを a cm，点Aを含む $\overset{\frown}{BP}$ の長さを b cmとしたとき，$a:b=1:23$ を満たす点である。

解答欄(かいとうらん)に示した図をもとにして，$a:b=1:23$ となる点Pを直径ABより上側に定規とコンパスを用いて作図し，点Pの位置を示す文字Pも書け。

ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。

図3



2 右の**図1**で，点 O は原点，曲線fは関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを表している。

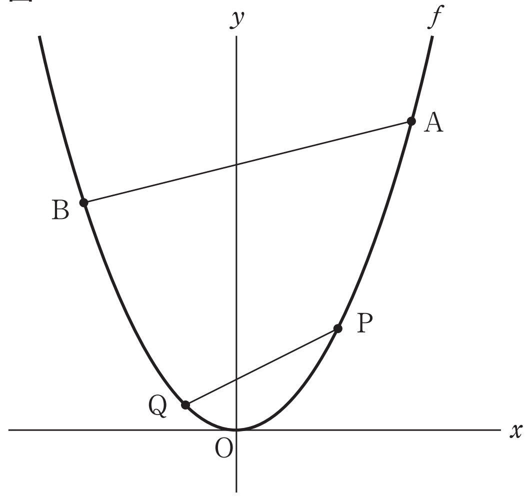
4点 A，B，P，Q はすべて曲線f上にあり，点 P のx座標はt $(t>0)$，点 Q のx座標は負の数である。

点 A のx座標は点 P のx座標より大きく，点 B のx座標は点 Q のx座標より小さい。

点 A と点 B，点 P と点 Q をそれぞれ結ぶ。

点 O から点 (1，0) までの距離（きょり），および点 O から点 (0，1) までの距離をそれぞれ 1 cm として，次の各問に答えよ。

図1

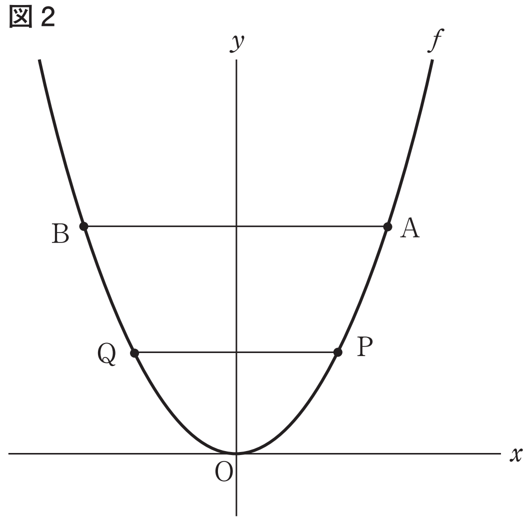


〔問1〕 右の**図2**は，**図1**において，線分 AB と線分 PQ がともにx軸に平行になる場合を表している。

次の (1)，(2) に答えよ。

(1) 点 A のy座標と点 P のy座標の差がtであり，AB = 4 cm であるとき，tの値（あたい）を求めよ。

図2

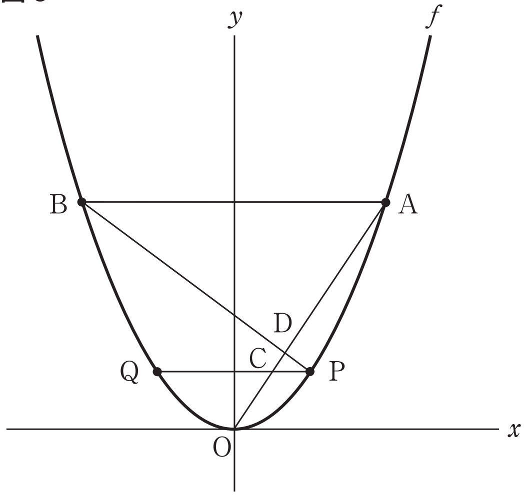


(2) 右の**図3**は，**図2**において，点Aのx座標を3とし，点Oと点A，点Bと点Pをそれぞれ結び，線分OAと線分PQ，線分OAと線分PBとの交点をそれぞれC，Dとした場合を表している。

△ABDと△CPDの相似比が8：1となるとき，点Dの座標を求めよ。

ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

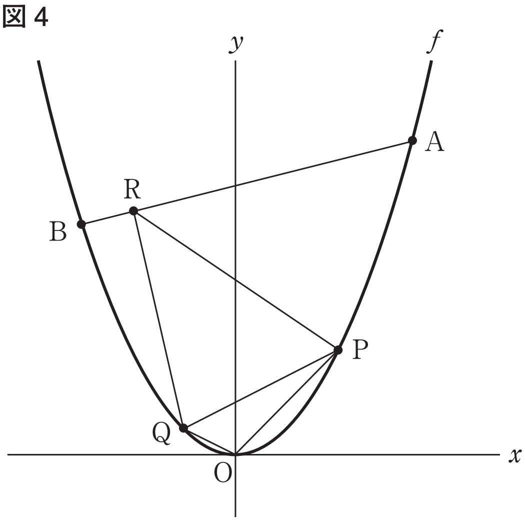
図3



〔問2〕 右の**図4**は，**図1**において，点Qのx座標を$-\dfrac{t}{2}$，線分AB上にある点をRとし，点Oと点P，点Oと点Q，点Pと点R，点Qと点Rをそれぞれ結んだ場合を表している。

2点P，Qを通る直線の傾きが$\dfrac{1}{4}$で，点Rが線分AB上のどこにあっても，常に△RQPの面積が△OPQの面積の3倍となるとき，2点A，Bを通る直線の式を求めよ。

図4



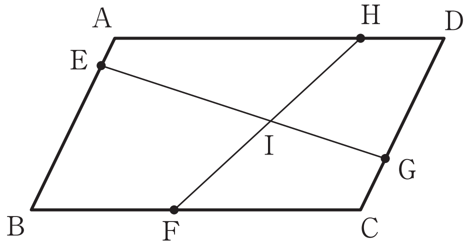
3 右の**図 1** で，四角形 ABCD は平行四辺形である。

点 E，F，G，H は，それぞれ辺 AB，辺 BC，辺 CD，辺 DA 上にある点である。

点 E と点 G，点 F と点 H をそれぞれ結び，線分 EG と線分 FH との交点を I とする。

次の各問に答えよ。

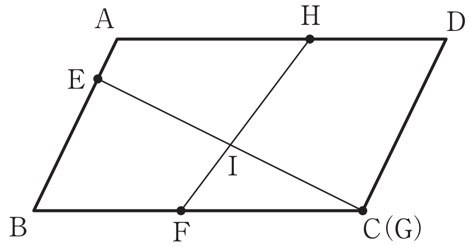
図 1



〔問 1〕 右の**図 2** は，**図 1** において，点 G が頂点 C に一致（いっち）し，∠BEC＝90°，BE＝BF，EI＝IC となる場合を表している。

∠ABC＝60° のとき，∠EIF の大きさは何度か。

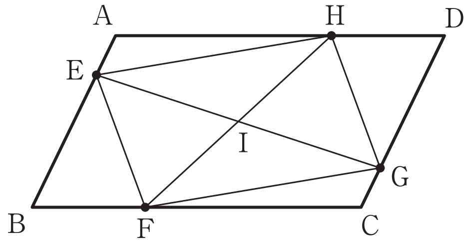
図 2



〔問 2〕　右の**図 3** は，**図 1** において，点 I が四角形 ABCD の対角線の交点に一致し，点 E と点 F，点 E と点 H，点 F と点 G，点 G と点 H をそれぞれ結んだ場合を表している。

四角形 EFGH は平行四辺形であることを証明せよ。

図 3



〔問 3〕　右の**図 4** は，**図 1** において，

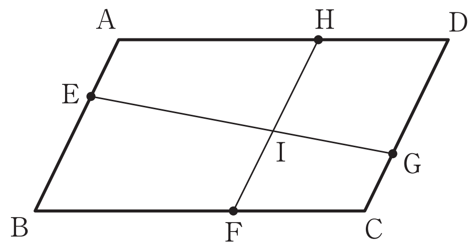
AE：EB ＝ CG：GD ＝ 1：2,

BF：FC ＝ AH：HD ＝ m：$(2-m)$　$(0 < m < 2)$

となる場合を表している。

線分 HI の長さと線分 IF の長さの比を m を用いて表せ。

図 4



4 先生が数学の授業で次の**【課題】**を出した。この**【課題】**について考えている**【太郎さんと花子さんの会話】**を読んで，あとの各問に答えよ。

【課題】

3以上の自然数Nを，2つの自然数x，yの和で，$N = x + y$と表す。ただし，$x > y$とする。さらに，xとyの積xyを考える。

このとき，積xyが2つの自然数m，nの平方の差で，$xy = m^2 - n^2$と表すことができるのはNがどのような場合か考えよ。

【太郎さんと花子さんの会話】

太郎：まずはNに具体的な数を当てはめて考えてみよう。$N = 8$としたらどうかな。

花子：8は$7 + 1$か$6 + 2$か$5 + 3$だから，$N = 8$のときxとyの積xyは3組あるね。

太郎：$7 \times 1 = 4^2 - 3^2$，$6 \times 2 = 4^2 - 2^2$，$5 \times 3 = 4^2 - 1^2$だから，$N = 8$とすると積xyは，必ず自然数の平方の差で表すことができるね。$N = 7$とするとどうかな。

花子：(1)<u>積xyは，必ずしも自然数の平方の差で表せるとは限らないね。</u>

太郎：Nとしてもっと大きな数でいくつか考えてみようか。$N = 2020$や$N = 2021$の場合はどうかな。

花子：大きな数だからすぐには分からないけど，積xyを自然数の平方の差で必ず表すためにはNに何か条件が必要だと思う。

太郎：そうか，分かった。(2)<u>Nが偶数（ぐうすう）のときには，積xyは必ず自然数の平方の差で表すことができるよ。</u>

花子：$N = x + y$だから，2つの数x，yがともに偶数ならNは偶数だね。

太郎：そうだね。ちなみに，2つの数x，yについて**【表】**で示される関係があるよ。**ア**～**オ**には偶数か奇数のどちらかが必ず入るよ。

【表】

	x，yともに偶数	x，yともに奇数	x，yどちらかが偶数でもう一方が奇数
$x + y$	偶数	**ア**	**イ**
$x - y$	**ウ**	**エ**	**オ**

花子：なるほどね。じゃあ，$N = 2021$の場合は，積xyは自然数の平方の差で必ずしも表せるとは限らないということかな。

太郎：そうだね。例えば，$2021 = x + y$として，$x = 2019$，$y = 2$のときは，積xyは自然数の平方の差で表せないけど，(3)<u>$x = 1984$，$y = 37$のときは，積xyは自然数の平方の差で表すことができるよ。</u>

〔問 1〕 (1)積 xy は，必ずしも自然数の平方の差で表せるとは限らないね。とあるが，N = 7 の場合，自然数の平方の差で表すことができる（x，y）の組は 1 組である。このとき x と y の積 xy を求めよ。

〔問 2〕 (2)N が偶数(ぐうすう)のときには，積 xy は必ず自然数の平方の差で表すことができるよ。が正しい理由を文字 N，x，y，m，n を用いて説明せよ。

ただし，**【表】**の**ア**～**オ**に偶数か奇数を当てはめた結果については証明せずに用いてよい。

〔問 3〕 (3)$x = 1984$，$y = 37$ のときは，積 xy は自然数の平方の差で表すことができるよ。とあるが，$1984 \times 37 = m^2 - n^2$ を満たす自然数（m，n）の組は何組あるか。