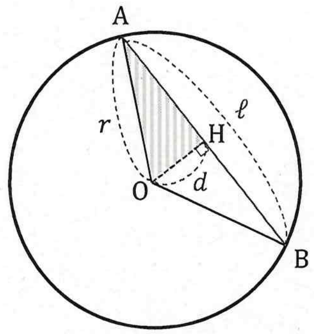
数学Ⅰ　解説用プリント　No.2-13　　組　　番　氏名

【　円が切り取る弦の長さ　】

クリアー例題51　直線 $x+y-1=0$ …①　が円　$x^2+y^2=4$ …②　によって切り取られる線分の長さと，線分の中点の座標を求めよ。

方針1

円の中心から弦ABに垂線OHを下ろす。
直角三角形OHAに対し，三平方の定理を適用する。
OHの長さ d は，点と直線の距離の式で求める。
弦ABの長さ ℓ は，AHの2倍であることに注意！



方針1の方が計算は簡略だと思いますが…。

直線①と円②の交点をA, Bとする。

円②の中心はO(0,0)，半径は2だから OA = 2

点Oから線分ABに垂線OHを下ろすと，OA = OBより

点Hは線分ABの中点である。 …③　← 円の中心から弦に垂線を下ろすと，垂線は弦を2等分する。

ここで，点Oと直線①の距離は

$$OH=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を利用して，円の中心と弦の距離を求める。

直角三角形OHAにおいて三平方の定理より　（$OA^2=OH^2+AH^2$ より $AH=\sqrt{OA^2-OH^2}$）

$$AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

よって③より求める線分の長さは　$AB=2AH=\sqrt{14}$

また直線①の傾きは $y=-x+1$ より -1　（傾き m の直線と垂直な直線の傾きは $-\dfrac{1}{m}$）

直線①⊥OH だから直線OHは点Oを通り，傾き1より

その方程式は $y=x$ …④

よって①,④を連立して解くと $x=y=\dfrac{1}{2}$ より，線分ABの中点の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

〈解と係数の関係〉
2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α,β とすると
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

方針2　円と直線の方程式を連立し，x の2次方程式※を作る。2つの交点A，Bの x 座標は2次方程式※の解だから，その解を α，β とおくと，交点の座標を α，β で表せる。
2点間の距離の公式と解と係数の関係を用いて，弦の長さを求める。

①,②を連立し，y を消去すると

$$x^2+(-x+1)^2=4$$

整理して　$2x^2-2x-3=0$ …※

※の実数解が，①と②の交点の x 座標となるから，これらを α,β とおく

※において，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-\frac{3}{2} \quad \cdots③$$

また，①と②の2つの交点の座標は $(\alpha,-\alpha+1)$，$(\beta,-\beta+1)$ と表せるから，①が②によって切り取られる線分の長さは

交点は直線の $y=-x+1$ 上にあるから，$x=\alpha,\beta$ を代入して y 座標を求められる。

$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{(-\beta+1)-(-\alpha+1)\}^2}$$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 間の距離 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}$$

$(\alpha-\beta)^2=(\beta-\alpha)^2$ だから ひとつにまとめられる。

$$=\sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}=\sqrt{2\{1^2-4\cdot(-\tfrac{3}{2})\}}=\sqrt{14}$$

$(\beta-\alpha)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-4\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

また，切り取られる線分の中点の座標は

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ -\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right) \text{ より } \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \text{ である。}$$

$y=-x+1$ に $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を代入した。

交点の y 座標の中点だから $\dfrac{(-\alpha+1)+(-\beta+1)}{2}$ と考えることも可です。

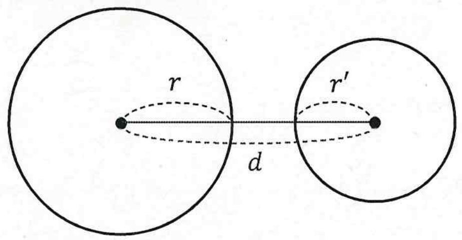
数学Ⅱ　解説用プリント　No.2-14　　組　　番　氏名

◎　２つの円の位置関係（本来は数Ａの内容）

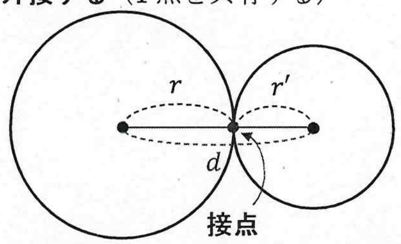
２円の半径をr，r' $(r>r')$，中心間の距離をdとするとき，２円の位置関係は次のように分類される。$r+r'$ および $r-r'$ と d との関係をつかもう。

	中心間の距離と半径の和	中心間の距離と半径の差
互いに外部にある	$d>r+r'$	
外接する（1点を共有する）	$d=r+r'$	
2点で交わる	$d<r+r'$	$d>r-r'$
内接する（1点を共有する）		$d=r-r'$
一方が他方の内部にある		$d<r-r'$

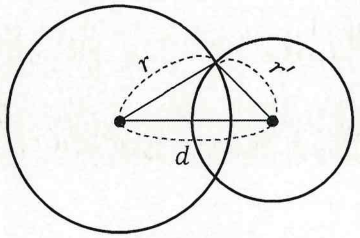
互いに外部にある



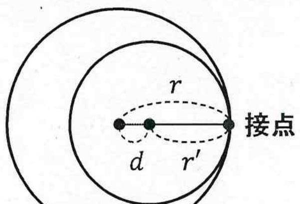
外接する（1点を共有する）



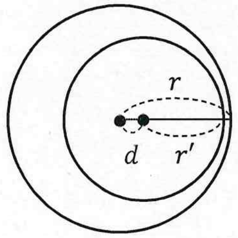
2点で交わる



内接する（1点を共有する）



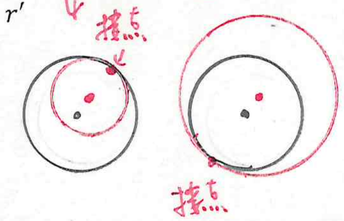
一方が他方の内部にある



注１
単に「接する」という表現のときは、外接と内接の両方を指す。

ともに成り立てばよいから
$r-r'<d<r+r'$

注２
一方が他方に「内接する」という条件は，どちらの円が内部にあるかで２通りの場合が存在することがある。



練32　円 $x^2+y^2=4$ と次の円の位置関係を調べよ。（P97 例13を参照）

(1)　$(x-4)^2+(y+3)^2=9$　　　(2)　$(x+3)^2+(y-3)^2=8$

$x^2+y^2=4$ …① は 中心が点 $(0,0)$，半径が２の円である。

(1) $(x-4)^2+(y+3)^2=9$ …② は
中心が点 $(4,-3)$，半径が３の円である。
２円①，②の中心間の距離 d_1 は
$d_1=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$
よって $d_1=2+3$ が成り立つから
２円①と②は外接する。

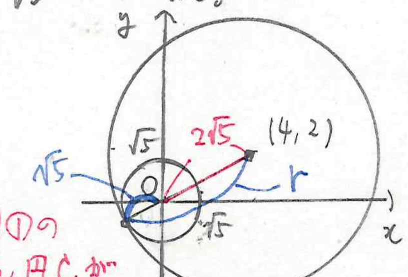
外接するのは
$d=r+r'$
のとき

(2) $(x+3)^2+(y-3)^2=8$ …③は
中心が点 $(-3,3)$，半径が $2\sqrt2$ の円である。
２円①，③の中心間の距離 d_2 は
$d_2=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt2$
よって $2\sqrt2-2<d_2<2\sqrt2+2$ が成り立つから，２円①と③は２点で交わる。

２点で交わるのは
$r-r'<d<r+r'$
のとき

練33　中心が点(4，2)である円Cと，円 $x^2+y^2=5$ が内接するとき，円Cの方程式を求めよ。（P97 例題8を参照）

円 $x^2+y^2=5$ … ① は 中心が点 $(0,0)$，半径が $\sqrt5$ の円である。
円Cと円① の中心間の距離 d は
$d=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt5$



円Cの半径を r とすると，２円が内接するのは
円①が円Cに内接するときだから ←点(4,2)は円①の外部にあるから，円Cが円①の内側で接することはない!!
$2\sqrt5=r-\sqrt5$ より $r=3\sqrt5$
したがって，円Cの方程式は $(x-4)^2+(y-2)^2=45$

内接するのは
$d=r-r'$
$(r>r')$
のとき。

図をかくなどして２円の位置関係を確かめよう。

◎　２つの円の共有点

２つの円に共有点が存在する場合は，２円の方程式を連立させた連立方程式の実数解として，共有点の座標が得られる。

練34　２つの円 $x^2+y^2=10$，$x^2+y^2-2x-y-5=0$ の共有点の座標を求めよ。（P98 応用例題5を参照）

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots ① \\ x^2+y^2-2x-y-5=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①－②より　$2x+y+5=10$ だから
$y=-2x+5$ … ③

③は２円の共有点を通る直線の方程式

③を①に代入して　$x^2+(-2x+5)^2=10$
展開し整理すると　$x^2-4x+3=0$
$(x-1)(x-3)=0$ より $x=1,3$

③より　→直線の方程式に代入すること
$x=1$ のとき $y=-2+5=3$
$x=3$ のとき $y=-6+5=-1$
したがって，求める共有点の座標は
$(1,3)$，$(3,-1)$ である。

→$x=1,3$ を①に代入してしまうと
$y^2=9\to y=\pm3$，$y^2=1\to y=\pm1$
となり不適切な値も出てしまうので注意。

数学Ⅱ　解説用プリント　No.2-15　　組　　番　氏名

【　共有点を通る図形の方程式　】

◎　2円の共有点を通る図形（円または直線）

応用例題6改　2つの円 $x^2+y^2=5$ …①　と $x^2+y^2-6x-2y+5=0$ …②　がある。

(1) 2つの円の交点A，Bを通る直線の方程式を求めよ。

(2) 2つの円の交点A，Bと点(0，3)を通る円の方程式を求めよ。

kを定数とするとき，

方程式 $k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2-6x-2y+5)=0$ …③　を考える。

2円の交点を$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ とする。点Aは円①，②の円周上にあるから，

$x_1{}^2+y_1{}^2-5=0$，　$x_1{}^2+y_1{}^2-6x_1-2y_1+5=0$　が成り立つ。

よって，方程式③に $x=x_1$，$y=y_1$ を代入すると $k\times 0+0=0$ となり③を満たす。

→　$A(x_1,\ y_1)$は③の表す図形上にある。

方程式③に $x=x_2$，$y=y_2$ を代入しても同様なので，$B(x_2,\ y_2)$も③の表す図形上にある。

次に，③を整理すると，

$(k+1)x^2+(k+1)y^2-6x-2y-5k+5=0$　…④　となる。

$k\neq-1$ のとき，方程式④は x，y の2次式で，かつ x^2とy^2 の係数が等しく，xyの項がないから円の方程式を表す。

$k=-1$ のとき，方程式④の x^2とy^2 の項が消え x，y の1次式となり直線の方程式を表す。

したがって4つの —— 部より，方程式④即ち方程式③は

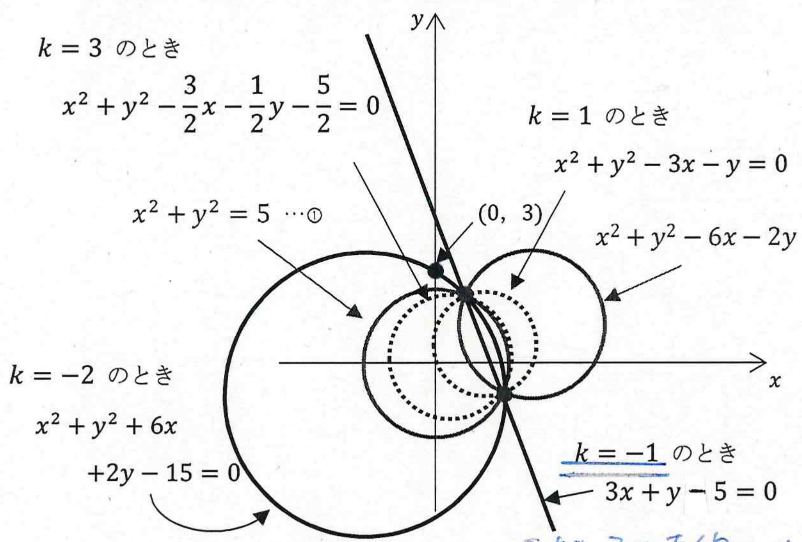
$k\neq-1$ のとき，2円の交点A，Bを通る円の方程式，

$k=-1$ のとき，2円の交点A，Bを通る直線の方程式　を表す。

(ただし，kをかけた方の円は除く。この例だと①の方ね)

ちなみに，主なkの値に対する図形を図示すると下のようになる。

一応，2点で交わるかを確かめると，
円①は
中心(0，0)，半径$\sqrt{5}$
円②は
$(x-3)^2+(y-1)^2=5$ より
中心(3，1)，半径$\sqrt{5}$
中心間の距離は
$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$
よって
$0=\sqrt{5}-\sqrt{5}<\sqrt{10}<\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$
を満たすから ①，②は
2点で交わっています。



2点を通る直線を求めたいときは
定数kをk=−1とすれば求められる！

2円①，②の交点を通る図形は，定数kを用いて

$k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2-6x-2y+5)=0$ …③ と表せる。

(1) ③において，$k=-1$ とすると，③は直線を表すから

$-(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2-6x-2y+5)=0$

整理して，求める直線の方程式は $3x+y-5=0$

(2) ③が(0，3)を通るから

$k(0^2+3^2-5)+(0^2+3^2-6\cdot0-2\cdot3+5)=0$

$4k+8=0$ より $k=-2$

③に代入して $-2(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2-6x-2y+5)=0$

整理して求める円の方程式は $x^2+y^2+6x+2y-15=0$ …☆

(0，3)は円①，②のどちらの円周上にもないので
$k(x^2+y^2-6x-2y+5)+(x^2+y^2-5)=0$
とおいても解ける。

ちなみに☆を変形すると $(x+3)^2+(y+1)^2=25$ より中心$(-3,-1)$，半径5の円である。

練35　2つの円 $x^2+y^2-4=0$ …①　と $x^2+y^2-4x+2y-6=0$ …② の2つの交点と点(1，2)を通る円の中心と半径を求めよ。

2円①，②の交点を通る図形は，定数kを用いて，　まずこの形においてみる。

$k(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-4x+2y-6)=0$ …③ と表せる。

③が点(1，2)を通るから　通っている点の座標を代入して kの値を求める。

$k(1^2+2^2-4)+(1^2+2^2-4\cdot1+2\cdot2-6)=0$

$k-1=0$ より $k=1$

③にkを代入して方程式を求める。

③に代入して $(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-4x+2y-6)=0$　中心と半径は平方完成で求める。

整理して $x^2+y^2-2x+y-5=0$ だから $(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

したがって，求める円の中心は $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$，半径は $\frac{5}{2}$ である。

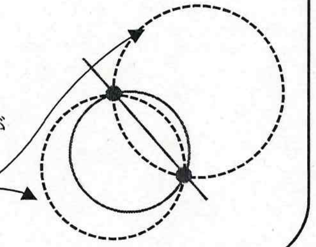
2円 $x^2+y^2+\ell x+my+n=0$ と $x^2+y^2+\ell'x+m'y+n'=0$ が2点で交わるとき，
その共有点を通る図形の方程式は，定数kを用いて

$k(x^2+y^2+\ell x+my+n)+(x^2+y^2+\ell'x+m'y+n')=0$

で表せる。ただし，　$k\neq-1$ のとき2つの共有点を通る円，
$k=-1$ のとき2つの共有点を通る直線を表す。

また，直線 $ax+by+c=0$ と 円 $x^2+y^2+\ell x+my+n=0$ が
2点で交わるとき，その共有点を通る円の方程式は，定数kを用いて

$k(ax+by+c)+(x^2+y^2+\ell x+my+n)=0$ で表せる。



定数kは直線の方程式の前につけること。

数学Ⅱ　解説用プリント　No.2-16　　組　　番　氏名

【　軌跡と方程式　その１　】

◎　軌跡とは…

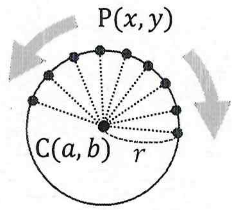
軌跡：　ある条件を満たす動点が描く図形（ある条件を満たす点全体の集合でできる図形と考えてもよい）を，この条件を満たす点の**軌跡**という。

軌跡の条件を表す方程式を**軌跡の方程式**という。

例１　定点Cについて

点Pが条件CP $= r$を満たしながら動くとき点Pの描く図形

（条件CP $= r$を満たす点Pの集まり）



点 C，P の座標をそれぞれ C$(a,\ b)$，P$(x,\ y)$とすると

点 P の軌跡の方程式は　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　である。

◎　軌跡の求め方

（ⅰ）　軌跡を描く点 P の座標を（x，y）とおく。

（ⅱ）　与えられた座標の条件を x，y の関係式で表す。

（ⅲ）　（ⅱ）で立てた関係式を変形して，円，放物線，直線などの図形の方程式を導く。

（ⅳ）　（ⅲ）で求めた方程式を満たす点は，与えられた条件を満たすことを確かめる。

（（ⅲ）の計算を逆にたどって簡単に確かめられるときは，（ⅳ）を略すこともある。）

（ⅴ）　設問が「軌跡を求めよ」のときは方程式が表す図形を答える。

注１．図形の名称(円，放物線，直線など)を明記する。

注２．円の場合は中心の座標と半径を答えるのが一般的

設問が「軌跡の方程式を求めよ」のときは方程式を答えればよいのが一般的。

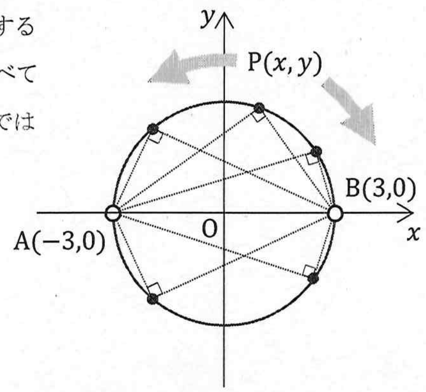
（ⅳ）補足　例．２点 A$(-3,\ 0)$，B$(3.\ 0)$について，∠APB＝90° を満たしながら動く点 P の軌跡

円周角の定理より，条件を満たす点 P は線分 AB を直径とする円周上にあることがわかります。しかし，この円周上の点すべてが条件 ∠APB＝90° を満たすかというと，点 A および点 B では∠APB を作れないので，∠APB＝90° を満たしません。

したがって，求める軌跡は

中心$(0,\ 0)$，半径 3 の円　（ただし，2 点 A，B を除く）

となります。



一般的には（ⅲ）で求めた方程式を満たす点のすべてが与えられた条件を満たすとは限りません。図形上のすべての点が条件を満たすときは，本来「逆に〇〇上の任意の点は与えられた条件を満たす」とことわるのですが，これが明らな場合にはただし書きを省略している場合も多いです。

(i)

軌跡を描く点の座標を(x,y)とおくこと!!

まず ここから スタート。

2点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)間の距離は

$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

この$\sqrt{\ }$をはずしたいので先に2乗しておくのである。

$4\{x^2+2x+1+y^2\}=x^2-4x+4+y^2$

$3x^2+12x+3y^2=0$

Lesson. 1　距離の関係式が与えられた軌跡（P.101　例 14　参照）

P.112　問題 16

２点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ からの距離の２乗の差 AP^2-BP^2 が８である点 P の軌跡を求めよ。

点Pの座標を$P(x,y)$とする。

$AP^2-BP^2=8$ より

$\{(x+1)^2+y^2\}-\{(x-1)^2+y^2\}=8$

$\{x^2+2x+1+y^2\}-\{x^2-2x+1+y^2\}=8$

$4x=8$

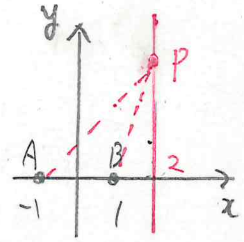
整理すると　$x=2$ …①

よって 点Pは 直線①上にある。

逆に 直線①上の任意の点は与えられた条件を満たす。

したがって 求める軌跡は $\boxed{直線}$ $x=2$ である。

図形の名称は必ず答える!!



Lesson. 2　アポロニウスの円，垂直２等分線（P.102　例題 9　参照）

P.102　練 37 改

(1)　２点 A$(-1,\ 0)$，B$(2,\ 0)$ からの距離の比が　1：2　である点 P の軌跡を求めよ。

(2)　２点 A$(4,\ 0)$，B$(0,\ 2)$ からの距離の比が　1：1　である点 P の軌跡を求めよ。

(1) 点Pの座標を$P(x,y)$とする。

注意!! 忘れずに2乗しよう

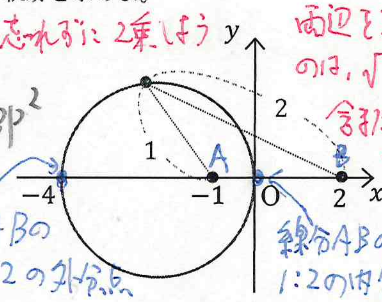
AP：BP＝1：2 より　2AP＝BP 即ち $4AP^2=BP^2$

両辺を2乗するのは，$\sqrt{\ }$を含まない式にするためです。

ゆえに $4\{(x+1)^2+y^2\}=(x-2)^2+y^2$

整理して　$x^2+4x+y^2=0$ より

$(x+2)^2+y^2=4$ …①



よって点Pは円①上にある。逆に円①上の任意の点は与えられた条件を満たす。

したがって，求める軌跡は 中心$(-2,0)$，半径2の $\boxed{円}$ である。

中心と半径は示しておこう!!

名称を答える!!

(2) 点Pの座標を$P(x,y)$とする。

AP：BP＝1：1 より　AP＝BP 即ち $AP^2=BP^2$

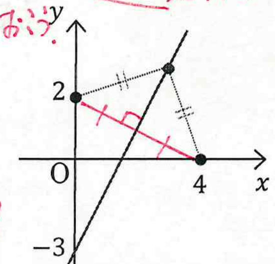
ゆえに $(x-4)^2+y^2=x^2+(y-2)^2$

整理して　$2x-y-3=0$ …①

名称を答える!!

よって 点Pは直線①上にある。逆に直線①上の点は与えられた条件を満たす。

したがって，求める軌跡は $\boxed{直線}$ $2x-y-3=0$ である。



$m>0$，$n>0$ のとき２点 A，B に対して，AP：BP＝m：nを満たす点 P の軌跡は

（ⅰ）　$m\neq n$　のとき　線分 AB を m：nに内分する点と外分する点を直径の両端に持つ円

この円を**アポロニウスの円**という。

（ⅱ）　$m=n$　のとき　線分 AB の垂直二等分線

【　ベクトルの加法・減法・実数倍　その３　】

◎　ベクトルを含む式の計算

ベクトルの加法，減法，実数倍の計算は，整式の場合と同じように行える。
（式を整理したり，１次方程式や連立方程式を解く要領と同じである。）

例１．$2(\vec{a}+\vec{b})-3(\vec{a}-2\vec{b})$ を計算せよ。

$2(\vec{a}+\vec{b})-3(\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{a}+6\vec{b}=(2-3)\vec{a}+(2+6)\vec{b}=-\vec{a}+8\vec{b}$

$2(a+b)-3(a-2b)$ の計算と同じ

例２．クリアーP.116　例題３

(1)　等式 $2\vec{x}+\vec{a}+\vec{b}=\vec{x}-\vec{a}-2\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　等式 $\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$，$\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$2\vec{x}+\vec{a}+\vec{b}=\vec{x}-\vec{a}-2\vec{b}$ より $2\vec{x}-\vec{x}=-\vec{a}-2\vec{b}-\vec{a}-\vec{b}$
よって $\vec{x}=-2\vec{a}-3\vec{b}$

xの１次方程式
$2x+a+b=x-a-b$
を解くときと同じ

(2)　$\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$ …①，$\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}$ …②　とすると

①＋②より $2\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$ だから　$\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$，

①－②より $2\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}$ だから　$\vec{y}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ である。

x，yの２元１次連立方程式
$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$
を解くときと同じ

練４　次の計算をせよ。

(1)　$(2\vec{a}-3\vec{b})+(3\vec{a}+4\vec{b})$　　(2)　$2(-\vec{a}+2\vec{b})-4(\vec{a}-3\vec{b})+3\vec{a}$

(1)　(与式) $=2\vec{a}-3\vec{b}+3\vec{a}+4\vec{b}$
$=5\vec{a}+\vec{b}$

(2)　(与式) $=-2\vec{a}+4\vec{b}-4\vec{a}+12\vec{b}+3\vec{a}$
$=-3\vec{a}+16\vec{b}$

練５　次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$2\vec{x}-3\vec{a}=6\vec{b}-\vec{x}$　　(2)　$\vec{x}+\vec{a}-3\vec{b}=2(\vec{x}-2\vec{a}-3\vec{b})$

(1)　$2\vec{x}-3\vec{a}=6\vec{b}-\vec{x}$ より
$3\vec{x}=3\vec{a}+6\vec{b}$
よって $\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$

(2)　$\vec{x}+\vec{a}-3\vec{b}=2(\vec{x}-2\vec{a}-3\vec{b})$ より
$\vec{x}+\vec{a}-3\vec{b}=2\vec{x}-4\vec{a}-6\vec{b}$
よって $-\vec{x}=-5\vec{a}-3\vec{b}$ より $\vec{x}=5\vec{a}+3\vec{b}$

問　等式 $3\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$，$5\vec{x}+2\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$\begin{cases} 3\vec{x}+\vec{y}=\vec{a} & \cdots ① \\ 5\vec{x}+2\vec{y}=\vec{b} & \cdots ② \end{cases}$

①×２－②より　$\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}$　…③

③を①に代入して　$3(2\vec{a}-\vec{b})+\vec{y}=\vec{a}$

$6\vec{a}-3\vec{b}+\vec{y}=\vec{a}$

よって　$\vec{y}=-5\vec{a}+3\vec{b}$

【　ベクトルの平行　】

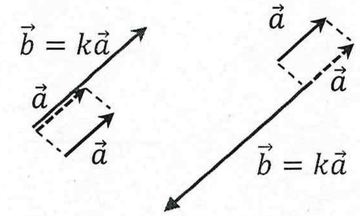
◎　ベクトルの平行条件

反対向きを忘れないように！

ベクトルの平行：$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じか，または反対のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**平行**であるといい，記号 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ で表す。

$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a}\neq\vec{0}\ ;\ \vec{b}\neq\vec{0}\ のとき， \\ \vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}\ となる実数kが存在する \end{array}}$

$k>0$のとき　　$k<0$のとき



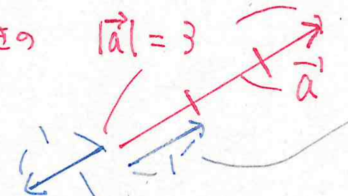
例１　$\vec{a}\neq\vec{0}$のとき$\vec{a}$と平行な単位ベクトルは

$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$　と　$-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$　である。

$\vec{a}$と同じ向きの単位ベクトル　　$\vec{a}$と反対向きの単位ベクトル

例えば大きさが３のベクトル$\vec{a}$なら

$|\vec{a}|=3$



同じ向きの $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{a}}{3}$

反対向きの $-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=-\dfrac{\vec{a}}{3}$

の２つがある。

練６　次の問に答えよ。

(1)　$\vec{e}$ を単位ベクトルとするとき，$\vec{e}$ と平行で，大きさが３のベクトルを求めよ。

(2)　$|\vec{a}|=5$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを求めよ。

(1)　$|\vec{e}|=1$ である $\vec{e}$ と平行で，大きさが３のベクトルは

単位ベクトルの大きさは１

$3\vec{e}$　と　$-3\vec{e}$　である。

同じ向き　　反対向き

単に「平行」という条件なら
向きが同じもの，反対のものの
両方を考えること！！
忘れずに！

(2)　$|\vec{a}|=5$ より，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは

$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と $-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$　即ち　$\dfrac{\vec{a}}{5}$ と $-\dfrac{\vec{a}}{5}$　である。

大きさが５だから $\frac{1}{5}$倍して大きさを１に直す。
向きについて特にことわりはないので，反対向きの $-\dfrac{\vec{a}}{5}$ も答えること。

数学Ｂ　解説用プリント　No.1-4　　　組　　番　氏名

【　ベクトルの分解　】

◎　ベクトルの分解

s，tを実数とする。

２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，また $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，

$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$　ならば　$s=0$ かつ $t=0$　…　☆

証)　$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$　のとき，$s\neq 0$ と仮定すると

$\vec{a}=-\frac{t}{s}\vec{b}$　となり，$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ である。

これは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないことに矛盾する。

したがって，$s=0$ となるから，$t\vec{b}=\vec{0}$　かつ $\vec{b}\neq\vec{0}$ より $t=0$

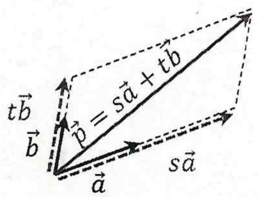
さらに，

２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，また $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t を用いて

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$　と表せる。

この s，t は $\vec{p}$ に対して**ただひと通りに定まる**。即ち

$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$　⇔　$s=s'$ かつ $t=t'$



証)　$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$ ならば $(s-s')\vec{a}+(t-t')\vec{b}=\vec{0}$

上で証明した性質☆より $s-s'=0$ かつ $t-t'=0$ より $s=s'$ かつ $t=t'$

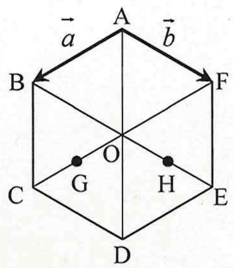
逆は明らかに成り立つ。

△OCEに
中点連結定理を
用いると
GH//CE, $GH=\frac{1}{2}CE$
だから
$\overrightarrow{GH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$
$=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$
とすることも
できるかな。

練７改　正六角形ABCDEFにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$　とする。正六角形の中心をO，線分OCの中点をG，線分OEの中点をHとするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AE}$　(2) $\overrightarrow{BC}$　(3) $\overrightarrow{AD}$　(4) $\overrightarrow{DF}$

(5) $\overrightarrow{CE}$　(6) $\overrightarrow{BG}$　(7) $\overrightarrow{CH}$　(8) $\overrightarrow{GH}$



(1) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\vec{a}+2\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}=2\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{P\square}+\overrightarrow{\square Q}$　の形を活用していこう!!

(4) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=(-\vec{a})+\{-(\vec{a}+\vec{b})\}=-2\vec{a}-\vec{b}$

(5) $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\vec{b}+(-\vec{a})=\vec{b}-\vec{a}$　$(=-\vec{a}+\vec{b})$

別　$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{\square Q}-\overrightarrow{\square P}$　という差の形での分解も重要です。

順序に注意

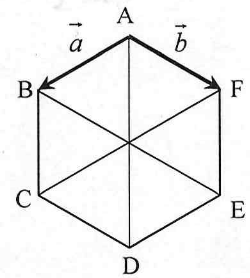
(6) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{BO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

(7) $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{CO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

(8) $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$

(別　$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OH}$ と考えてもできます。)　$\left(=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$

練９　正六角形ABCDEFにおいて，$\overrightarrow{AC}=\vec{u}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{v}$ とするとき，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}$，を，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ を用いて表せ。



正六角形の中心をOとする。

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$

よって　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=\vec{b}+(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}+2\vec{b}$

ゆえに　$\begin{cases}\vec{u}=2\vec{a}+\vec{b} & \cdots ① \\ \vec{v}=\vec{a}+2\vec{b} & \cdots ②\end{cases}$

①×2−②より　$2\vec{u}-\vec{v}=3\vec{a}$ だから　$\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}$

①−2×②より　$\vec{u}-2\vec{v}=-3\vec{b}$ だから　$\vec{b}=-\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}$

である。

$\vec{u}$と$\vec{v}$で$\vec{a}$，$\vec{b}$を表現するのはわかりにくいですね。

まず，$\vec{a}$と$\vec{b}$で$\vec{u}$，$\vec{v}$を表現してみましょう。

この関係式を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が未知数の連立方程式のように考えると，$\vec{a}$ か $\vec{b}$ の一方を消去することで目的の式が得られる。

数学B 解説用プリント No.1-5 組 番 氏名

【 ベクトルの成分 その1 】

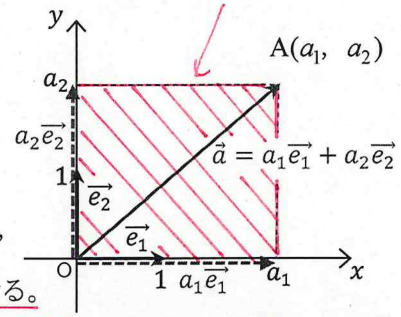
◎ ベクトルの成分

$\vec{a}$に対し，この長方形はただ1つに決まる!!

基本ベクトル：右図の$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$

$\vec{e_1}$：x 軸方向の単位ベクトル

$\vec{e_2}$：y 軸方向の単位ベクトル



成分：座標平面上の点A(a_1，a_2)について$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ とすると，

図のように，$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$ の形にただ1通りに表せる。 とても重要!!

このとき，実数a_1，a_2を$\vec{a}$の**成分**といい，

a_1をx**成分**，a_2をy **成分**という。 $\vec{a}$をa_1とa_2の数字の組で表せる

原点じゃないと一致しないので注意して!

記号では$\vec{a}$ = (a_1，a_2)，あるいは$\overrightarrow{OA}$ = (a_1，a_2) と表す。

例えば $\vec{e_1}$ = (1，0)，$\vec{e_2}$ = (0，1)，$\vec{0}$ = (0，0) である。

$\vec{a}$を原点Oを始点とする有向線分OAで表すとき，$\vec{a}$の成分の組と点Aの座標は一致する。

基本ベクトル表示

$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$

成分表示

$\vec{a}$ = (a_1，a_2)

◎ ベクトルの相等，大きさ

$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$の相等については $\boxed{\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2}$

また，ベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2)$ の大きさは $\boxed{|a|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}}$

練8 右図の $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ を成分で表し，それぞれの大きさを求めよ。（$\vec{a}$を例として示します。）

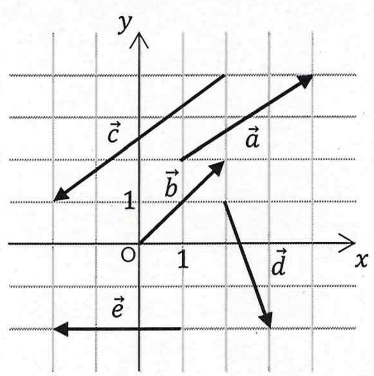
$\vec{a}=(3\ ,2)$ $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\vec{b}=(2,2)$，$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\vec{c}=(-4,-3)$，$|\vec{c}|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$

$\vec{d}=(1,-3)$，$|\vec{d}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

$\vec{e}=(-3,0)$，$|\vec{e}|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=3$



問 $\vec{a}$ =(2，1) と同じ向きの単位ベクトル$\vec{e}$を成分で表せ。 (大きさが1)

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ $|\vec{a}|$で割って大きさを1に!!

よって $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ は

$\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

「同じ向き」との指定がなければ…

$\pm\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ だから 同じ向き 反対向き

$\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ と $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}},-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

◎ 成分によるベクトルの和・差・実数倍

和	$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$
実数倍	$k(a_1,a_2)=(ka_1,ka_2)$ ただしkは実数

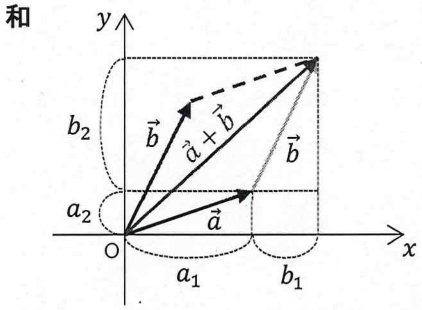
以上をまとめると，一般にk，ℓを実数とするとき

$$k(a_1,a_2)+\ell(b_1,b_2)=(ka_1+\ell b_1,ka_2+\ell b_2)$$

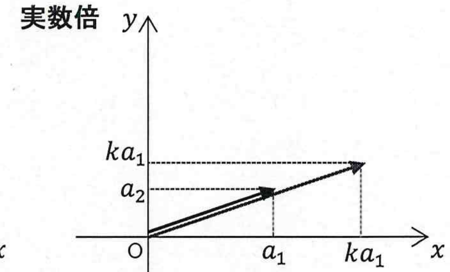
が成り立つ。この式で $k=1$，$\ell=-1$ とすれば

差 $(a_1,a_2)-(b_1,b_2)=(a_1-b_1,a_2-b_2)$ が示される。

和



実数倍



練9 $\vec{a}$ =(2，1)，$\vec{b}$ =(−2，3) のとき，次のベクトルを成分で表せ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $\vec{a}-\vec{b}$ (3) $4\vec{a}$ (4) $2\vec{a}-3\vec{b}$

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(2,1)+(-2,3)=(0,4)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(2,1)-(-2,3)=(4,-2)$

(3) $4\vec{a}=4(2,1)=(8,4)$

(4) $2\vec{a}-3\vec{b}$
$=2(2,1)-3(-2,3)$
$=(2\cdot2-3\cdot(-2),\ 2\cdot1-3\cdot3)$
$=(10,-7)$

練10 $\vec{a}$ =(2，1)，$\vec{b}$ =(−1，1) のとき，次のベクトルを $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

(1) $\vec{p}$ =(4，5) (2) $\vec{q}$ =(5，−2)

$s\vec{a}+t\vec{b}=s(2,1)+t(-1,1)=(2s-t,\ s+t)$

(1) $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$より 連立方程式を作ってs,tを求める。

$4=2s-t$，$5=s+t$

連立して解くと $s=3$，$t=2$

したがって $\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$ である。

(2) $\vec{q}=s\vec{a}+t\vec{b}$より

$5=2s-t$，$-2=s+t$

連立して解くと $s=1$，$t=-3$

したがって $\vec{q}=\vec{a}-3\vec{b}$

練11 $\vec{a}$ =(x，−1)，$\vec{b}$ =(3，$x+4$) が平行になるように，x の値を定めよ。 $\vec{a}$,$\vec{b}$が$\vec{0}$でないとき

$\vec{0}$ではないことを確かめておこう。

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ より $\vec{a}\parallel\vec{b}$ となるのは $\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}$ となる実数kが存在する

$\vec{b}=k\vec{a}$ を満たす実数kが存在することである。

$\vec{a}=(x,-1)$
$\vec{b}=(3,x+4)$
共に$\vec{0}$にはなりません。

よって $(3,x+4)=k(x,-1)$ より $3=kx$ …①，$x+4=-k$ …②

②より $x=-k-4$ だから①より $3=k(-k-4)$ 即ち $k^2+4k+3=0$

これを解いて $k=-1,-3$

②より $k=-1$のとき $x=-3$，$k=-3$のとき $x=-1$

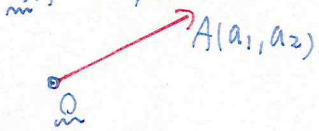
したがって求める値は $x=-3,-1$

数学B　解説用プリント　No.1-6　　　組　　番　氏名

【　ベクトルの成分　その２　】

◎　点の座標をベクトルの成分

$\overrightarrow{OA}=(a_1, a_2)$



原則　平面ベクトルを，原点Oを始点とする有向線分で表すとき，
　　ベクトルの成分の組と終点の座標は一致する。

座標平面上の２点 $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$ について，ベクトル$\overrightarrow{AB}$の成分と大きさは，次のようになる。

２点 $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$ について　引く順序に気をつけて！ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

例　２点 $A(2,\ -1)$, $B(-2,\ -3)$ について

$\overrightarrow{AB}=(-2-2,\ -3-(-1))=(-4,\ -2)$,

$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(-2-2)^2+\{-3-(-1)\}^2}=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

練12　４点 $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 0)$, $B(3,\ 5)$, $C(-2,\ -5)$ について，次のベクトルの成分で表せ。
また，その大きさを求めよ。

(1) $\overrightarrow{OB}$　　(2) $\overrightarrow{AB}$　　(3) $\overrightarrow{BC}$　　(4) $\overrightarrow{CA}$

(1) $\overrightarrow{OB}=(3,5)$, $\lvert\overrightarrow{OB}\rvert=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3-4,\ 5-0)=(-1,5)$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$

(3) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-2-3,\ -5-5)=(-5,-10)$

$\lvert\overrightarrow{BC}\rvert=\sqrt{(-5)^2+(-10)^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

(4) $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(4-(-2),\ 0-(-5))=(6,5)$

$\lvert\overrightarrow{CA}\rvert=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

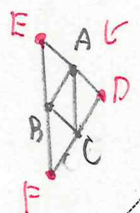
慣れるまではこの式をはさんでおく方がミスが少ない。

練13改　４点 $A(1,\ 5)$, $B(-2,\ 1)$, $C(0,\ -1)$, に対して，次の点の座標を求めよ。

(0)　四角形ABCDが平行四辺形になるような点Dの座標。

(1)　四角形ABECが平行四辺形になるような点Eの座標。

(2)　四角形AFBCが平行四辺形になるような点Fの座標。



4点A, B, C, 口でできる平行四辺形は3種類ある。点の順序に注意しよう!!

(0)　点Dの座標を$(x,\ y)$とおく。四角形ABCDが平行四辺形となるのは

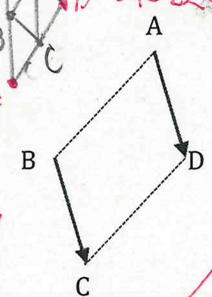
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ のときより　$(x-1,\ y-5)=(0-(-2),\ -1-1)$

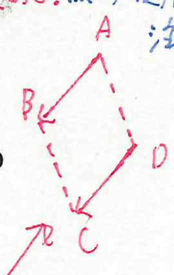
よって　$x-1=2$ かつ $y-5=-2$　より　$x=3$, $y=3$

したがって，点Dの座標は $D(3,\ 3)$ である。

$\overrightarrow{AD}$と$\overrightarrow{BC}$の向きと大きさが同じ

$\Longleftrightarrow$ $AD=BC$ かつ $AD \parallel BC$





他に $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ とすることなども可能

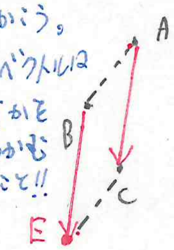
(1)　点Eの座標を$E(x,\ y)$とおく。四角形ABECが平行四辺形となるのは $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BE}$ のときより

$(0-1,\ -1-5)=(x-(-2),\ y-1)$

よって　$x+2=-1$ かつ $y-1=-6$ より $x=-3$, $y=-5$

したがって点Eの座標は $E(-3,-5)$ である。

点の順序に注意して図をかこう。等しいベクトルは何と何かを正しくつかむこと!!

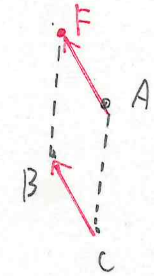


(2)　点Fの座標を$F(x,\ y)$とおく。四角形AFBCが平行四辺形となるのは $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CB}$ のときより

$(x-1,\ y-5)=(-2-0,\ 1-(-1))$

よって　$x-1=-2$ かつ $y-5=2$ より $x=-1$, $y=7$

したがって点Fの座標は $F(-1,7)$ である。



例1.　クリアーP.118　例題5

$\vec{a}=(10,\ 5)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$ で，t は実数とする。$\lvert\vec{a}+t\vec{b}\rvert$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

２乗して√を含まない式に

$\vec{a}+t\vec{b}=(10,5)+t(1,2)=(10+t,\ 5+2t)$

よって　$\lvert\vec{a}+t\vec{b}\rvert^2=(10+t)^2+(5+2t)^2$

$=5t^2+40t+125$

$5(t^2+8t+4^2)-5\cdot4^2+125$

$=5(t+4)^2+45$

$\lvert\vec{a}+t\vec{b}\rvert^2$ を t の式で表すと t の２次式となるので，平方完成して最小値を求める。

ゆえに $\lvert\vec{a}+t\vec{b}\rvert^2$ は $t=-4$ のとき 最小値 45 をとる。

ここで $\lvert\vec{a}+t\vec{b}\rvert\geqq0$ だから，このとき $\lvert\vec{a}+t\vec{b}\rvert$ も最小となる。

したがって $\lvert\vec{a}+t\vec{b}\rvert$ は $t=-4$ のとき最小値 $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ をとる。

$\lvert\vec{a}+t\vec{b}\rvert\geqq0$ だから

$\lvert\vec{a}+t\vec{b}\rvert^2$ が最小のとき $\lvert\vec{a}+t\vec{b}\rvert$ も最小となる。

$\lvert\vec{a}+t\vec{b}\rvert$ は√を含んでしまうので，あえて $\lvert\vec{a}+t\vec{b}\rvert^2$ を計算する。

このくらいはことわりましょう。