**1** (1) (ア) $P(x)=x^3+x^2+2x-1$ とすると，求める余りは

$$P(2)=2^3+2^2+2\cdot 2-1=15$$

(イ) $P(x)=x^3+4$ とすると，求める余りは

$$P\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)^3+4=-\frac{27}{8}+4=\frac{5}{8}$$

(2) (ア) $P(x)=9x^3+2x+a$ とする。

$P(x)$ を $3x+2$ で割ったときの余りが 1 となるとき　$P\left(-\frac{2}{3}\right)=1$

ここで　$P\left(-\frac{2}{3}\right)=9\left(-\frac{2}{3}\right)^3+2\left(-\frac{2}{3}\right)+a=-\frac{8}{3}-\frac{4}{3}+a=a-4$

よって　$a-4=1$　　ゆえに　$a=5$

(イ) $P(x)=x^3+ax+a+5$ とする。

$P(x)$ が $x-3$ で割り切れるとき　$P(3)=0$

ここで　$P(3)=3^3+a\cdot 3+a+5=4a+32$

よって　$4a+32=0$　　ゆえに　$a=-8$

**2** (1) $P(x)=3x^3-x^2-8x-4$ とすると

$$P(-1)=3(-1)^3-(-1)^2-8(-1)-4$$
$$=-3-1+8-4=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$$P(x)=(x+1)(3x^2-4x-4)$$
$$=(x+1)(x-2)(3x+2)$$

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2-4x-4 \\ \hline x+1 & 3x^3-x^2-8x-4 \\ & 3x^3+3x^2 \\ \hline & -4x^2-8x \\ & -4x^2-4x \\ \hline & -4x-4 \\ & -4x-4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(2) $P(x)=2x^3-5x^2+1$ とすると

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^3-5\left(\frac{1}{2}\right)^2+1$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+1=0$$

よって，$P(x)$ は $2x-1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$$P(x)=(2x-1)(x^2-2x-1)$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-2x-1 \\ \hline 2x-1 & 2x^3-5x^2+1 \\ & 2x^3-x^2 \\ \hline & -4x^2 \\ & -4x^2+2x \\ \hline & -2x+1 \\ & -2x+1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

**3** (1) $P(x)=2x^3+x^2-9$ とすると

$$P\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{4}+\frac{9}{4}-9=0$$

よって，$P(x)$ は $2x-3$ を因数にもつ。

右の割り算から　$P(x)=(2x-3)(x^2+2x+3)$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+2x+3 \\ \hline 2x-3 & 2x^3+x^2-9 \\ & 2x^3-3x^2 \\ \hline & 4x^2 \\ & 4x^2-6x \\ \hline & 6x-9 \\ & 6x-9 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(2) $P(x)=x^4+6x^3+7x^2-6x-8$ とすると

$$P(1)=1+6+7-6-8=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$$P(x)=(x-1)(x^3+7x^2+14x+8)$$

$$\begin{array}{r|l} & x^3+7x^2+14x+8 \\ \hline x-1 & x^4+6x^3+7x^2-6x-8 \\ & x^4-x^3 \\ \hline & 7x^3+7x^2 \\ & 7x^3-7x^2 \\ \hline & 14x^2-6x \\ & 14x^2-14x \\ \hline & 8x-8 \\ & 8x-8 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ここで，$Q(x)=x^3+7x^2+14x+8$ とすると

$$Q(-1)=-1+7-14+8=0$$

よって，$Q(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$$Q(x)=(x+1)(x^2+6x+8)=(x+1)(x+2)(x+4)$$

$P(x)=(x-1)Q(x)$ であるから

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+6x+8 \\ \hline x+1 & x^3+7x^2+14x+8 \\ & x^3+x^2 \\ \hline & 6x^2+14x \\ & 6x^2+6x \\ \hline & 8x+8 \\ & 8x+8 \\ \hline & 0 \end{array}$$

**4** $-2$ が解であるから　$(-2)^3+3(-2)^2+a(-2)-12=0$

整理して　$-2a-8=0$　　よって　$a=-4$

ゆえに，方程式は　$x^3+3x^2-4x-12=0$

この式の左辺は $x+2$ で割り切れるから，左辺を因数分解すると

$$(x+2)(x^2+x-6)=0$$

すなわち　$(x+2)(x+3)(x-2)=0$

よって，他の解は　$x=-3,\ 2$

**5** (1) 移項すると　$x^3+27=0$

左辺を因数分解して　$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

よって　$x+3=0$　または　$x^2-3x+9=0$

ゆえに　$x=-3,\ \dfrac{3\pm 3\sqrt{3}\,i}{2}$

(2) 左辺を因数分解して　$(x^2+2)(x^2-6)=0$

よって　$x^2+2=0$　または　$x^2-6=0$

ゆえに　$x=\pm\sqrt{6},\ \pm\sqrt{2}\,i$

(3) $P(x)=x^3-9x^2+23x-15$ とすると　$P(1)=1-9+23-15=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから，$P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(x-1)(x^2-8x+15)=(x-1)(x-3)(x-5)$$

$P(x)=0$ から　$x-1=0$　または　$x-3=0$　または　$x-5=0$

よって　$x=1,\ 3,\ 5$

(4) $P(x)=(x-2)(x-1)x-3\cdot 4\cdot 5$ とすると　$P(5)=3\cdot 4\cdot 5-3\cdot 4\cdot 5=0$

また　$P(x)=x^3-3x^2+2x-60$

$P(x)$ は $x-5$ で割り切れるから，$P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(x-5)(x^2+2x+12)$$

$P(x)=0$ から　$x-5=0$　または　$x^2+2x+12=0$

よって　$x=5,\ -1\pm\sqrt{11}\,i$

**6** (1) 関数の式を変形すると　$y=(x+2)^2-4$

したがって，$x=-2$ で最小値 $-4$ をとる。

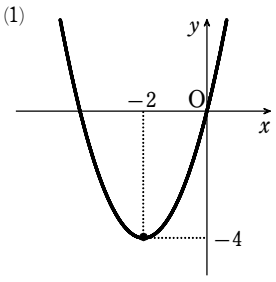
また，$y$ の値はいくらでも大きくなるから，最大値はない。

(2) 関数の式を変形すると　$y=-3(x+1)^2+4$

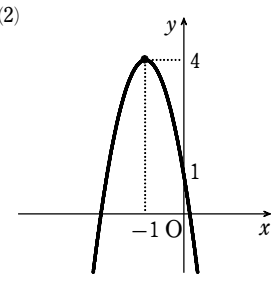
したがって，$x=-1$ で最大値 4 をとる。

また，$y$ の値はいくらでも小さくなるから，最小値はない。

(1)




(2)




(3) 関数の式を変形すると

$$y=2(x-2)^2-3\quad(0\leqq x\leqq 3)$$

よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

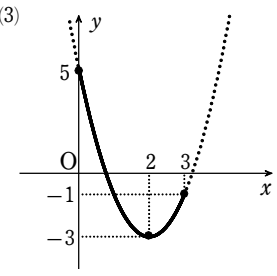
したがって

$x=0$ で最大値 5

$x=2$ で最小値 $-3$

をとる。

(3)




(4) 関数の式を変形すると

$$y=-(x-3)^2+7\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$

よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

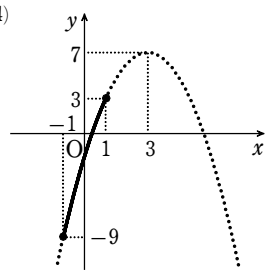
したがって

$x=1$ で最大値 3

$x=-1$ で最小値 $-9$

をとる。

(4)




**7** 関数の式を変形すると　$y=-2(x-2)^2+9\quad(0\leqq x\leqq a)$

また　$x=0$ のとき　$y=1$

$x=a$ のとき　$y=-2a^2+8a+1$

$x=2$ のとき　$y=9$

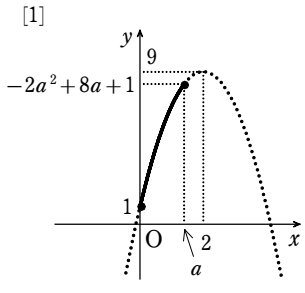
(1) [1] $0<a<2$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　$x=a$ で最大値 $-2a^2+8a+1$

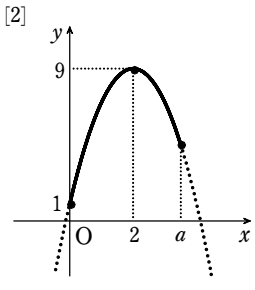
[2] $2\leqq a$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　$x=2$ で最大値 9

[1]




[2]




**注意**　上の解答において，

[1]では，軸が定義域の右外にある場合

[2] では，軸が定義域内にある場合

を考えている。

なお，軸 $x=2$ は定義域の左端 $x=0$ より右側にあるため，軸が定義域の左外にくるこ　とはない。

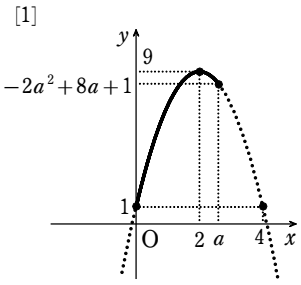
(2)　[1]　$0<a<4$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=0$ で最小値 1

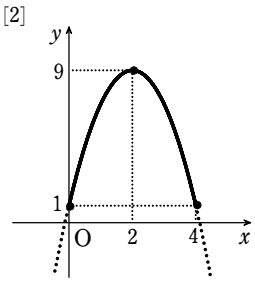
[2]　$a=4$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=0$，4 で最小値 1

[1]



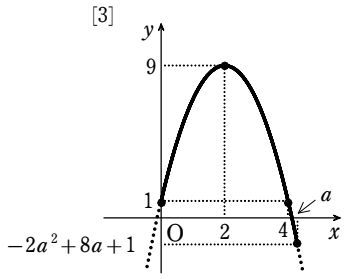

[2]




[3]　$4<a$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=a$ で最小値 $-2a^2+8a+1$

[3]




8 (1)　$x^2+7x+6=0$ を解くと　　$x=-6,\ -1$

よって，$x^2+7x+6\leqq 0$ の解は　　$-6\leqq x\leqq -1$

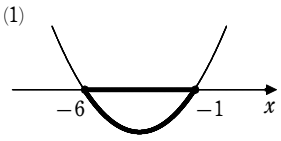
別解　$x^2+7x+6\leqq 0$ から　　$(x+6)(x+1)\leqq 0$　　よって　$-6\leqq x\leqq -1$

(2)　$x^2-2x-15=0$ を解くと　　$x=-3,\ 5$

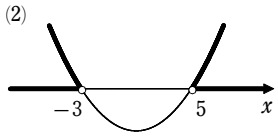
よって，$x^2-2x-15>0$ の解は　　$x<-3,\ 5<x$

別解　$x^2-2x-15>0$ から　　$(x+3)(x-5)>0$　　よって　$x<-3,\ 5<x$

(1)




(2)




(3)　$2x^2+x-6=0$ を解くと　　$x=-2,\ \dfrac{3}{2}$

よって，$2x^2+x-6<0$ の解は　　$-2<x<\dfrac{3}{2}$

別解　$2x^2+x-6<0$ から　　$(x+2)(2x-3)<0$

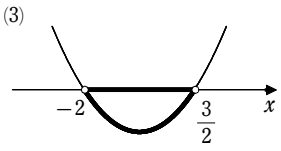
すなわち　　$2(x+2)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)<0$　　よって　　$-2<x<\dfrac{3}{2}$

(4)　両辺に $-1$ を掛けて　　$x^2-2x-4\geqq 0$

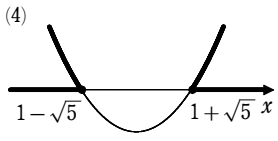
$x^2-2x-4=0$ を解くと　　$x=1\pm\sqrt{5}$

よって，与えられた不等式の解は　　$x\leqq 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}\leqq x$

(3)




(4)



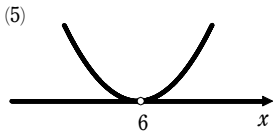

(5)　$x^2-12x+36=0$ を解くと　　$x=6$ (重解)

よって，$x^2-12x+36>0$ の解は　　6 以外のすべての実数

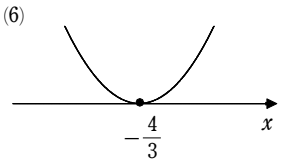
(6)　$9x^2+24x+16=0$ を解くと　　$x=-\dfrac{4}{3}$ (重解)

よって，$9x^2+24x+16\leqq 0$ の解は　　$x=-\dfrac{4}{3}$

(5)




(6)




(7)　$x^2-x+3\geqq 0$

2 次方程式 $x^2-x+3=0$ の判別式を $D$ とすると

$$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 3=-11<0$$

よって，与えられた不等式の解は，すべての実数。

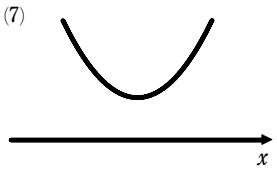
(8)　両辺に $-1$ を掛けて　　$2x^2+6x+5<0$

2 次方程式 $2x^2+6x+5=0$ の判別式を $D$ とすると

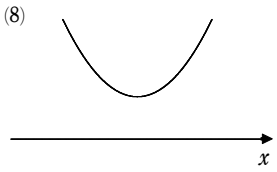
$$D=6^2-4\cdot 2\cdot 5=-4<0$$

よって，与えられた不等式の解はない。

(7)




(8)




参考　一般に，次のことが成り立つ。

$(x-\alpha)^2>0$ の解は　$\alpha$ 以外のすべての実数

$(x-\alpha)^2\geqq 0$ の解は　すべての実数

$(x-\alpha)^2<0$ の解は　ない

$(x-\alpha)^2\leqq 0$ の解は　$x=\alpha$

このことを利用して，(5)，(6) を解いてもよい。ただし，この場合もグラフを頭に思い浮

かべて，解を考える。

(5)　$x^2-12x+36>0$ から　　$(x-6)^2>0$

よって，解は　6 以外のすべての実数

(6)　$9x^2+24x+16\leqq 0$ から　　$(3x+4)^2\leqq 0$　　すなわち　　$9\left(x+\dfrac{4}{3}\right)^2\leqq 0$

よって，解は　$x=-\dfrac{4}{3}$

9 (1)　$P(x)$ を $x^2+4x-5$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=(x^2+4x-5)Q(x)+ax+b$$

すなわち　　$P(x)=(x-1)(x+5)Q(x)+ax+b$

条件から　　$P(1)=9$　かつ　$P(-5)=-3$

よって　　$\begin{cases} a+b=9 \\ -5a+b=-3 \end{cases}$

これを解いて　　$a=2,\ b=7$　　したがって，求める余りは　　$2x+7$

(2)　$2x^{99}+5$ を $x^2-1$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$2x^{99}+5=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$

すなわち　　$2x^{99}+5=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$　……①

① の両辺に $x=-1$ を代入して　　$2\cdot(-1)^{99}+5=-a+b$

よって　　$-a+b=3$　……②

① の両辺に $x=1$ を代入して　　$2\cdot 1^{99}+5=a+b$

よって　　$a+b=7$　……③

②，③ から　　$a=2,\ b=5$　　したがって，求める余りは　　$2x+5$

10 (1)　与えられた方程式から　　$\{(x^2-2x)+3\}\{(x^2-2x)-4\}=0$

すなわち　　$(x^2-2x+3)(x^2-2x-4)=0$

これを解いて　　$x=1\pm\sqrt{2}\,i,\ 1\pm\sqrt{5}$

(2)　$P(x)=8x^3+4x-3$ とすると　　$P\left(\dfrac{1}{2}\right)=1+2-3=0$

よって，$P(x)$ は $2x-1$ で割り切れるから，$P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(2x-1)(4x^2+2x+3)$$

$P(x)=0$ から　　$2x-1=0$　または　$4x^2+2x+3=0$

よって　　$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{11}\,i}{4}$

(3)　$P(x)=(x+1)(x+3)(x+5)-48$ とすると　　$P(1)=2\cdot 4\cdot 6-48=0$

また　　$P(x)=(x+1)(x^2+8x+15)-48=x^3+9x^2+23x-33$

$P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから，$P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(x-1)(x^2+10x+33)$$

$P(x)=0$ から　　$x-1=0$　または　$x^2+10x+33=0$

よって　　$x=1,\ -5\pm 2\sqrt{2}\,i$

(4)　$x(x+1)(x+2)(x+3)=x(x+3)\times(x+1)(x+2)=(x^2+3x)\{(x^2+3x)+2\}$

$$=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)$$

よって，方程式は　　$(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)=24$

これを変形して　　$(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)-24=0$

$$\{(x^2+3x)-4\}\{(x^2+3x)+6\}=0$$

$$(x+4)(x-1)(x^2+3x+6)=0$$

これを解いて　　$x=-4,\ 1,\ \dfrac{-3\pm\sqrt{15}\,i}{2}$

11 (解 1)　$2+i$ が解であるから　　$(2+i)^3+a(2+i)^2+b(2+i)-10=0$

整理して　　$3a+2b-8+(4a+b+11)i=0$

$3a+2b-8,\ 4a+b+11$ は実数であるから

$$3a+2b-8=0,\ 4a+b+11=0$$

これを解いて　　$a=-6,\ b=13$

このとき，方程式は　　$x^3-6x^2+13x-10=0$

左辺を因数分解すると　　$(x-2)(x^2-4x+5)=0$

これを解いて　　$x=2,\ 2\pm i$

したがって，他の解は　　$2,\ 2-i$

(解 2)　方程式の係数は実数であるから，$2+i$ と共役な複素数 $2-i$ も解である。

よって，方程式の左辺は $\{x-(2+i)\}\{x-(2-i)\}$ すなわち $x^2-4x+5$ で割り切れる。

左辺 $x^3+ax^2+bx-10$ を $x^2-4x+5$ で割ると，

商は　$x+a+4$，　余りは　$(4a+b+11)x-5(a+6)=0$

余りが 0 であるとき　　$4a+b+11=0,\ -5(a+6)=0$

よって　　$a=-6,\ b=13$

このとき，方程式は　　$(x^2-4x+5)(x-2)=0$　　これを解いて　　$x=2,\ 2\pm i$

したがって，他の解は　　$2,\ 2-i$

参考　「3 次方程式の解と係数の関係」を利用して，次のように解くこともできる。

方程式の係数は実数であるから，$2+i$ と共役な複素数 $2-i$ も解である。

もう 1 つの解を $p$ とすると，解と係数の関係により

$$p+(2+i)+(2-i)=-a$$
$$(2+i)p+(2-i)p+(2+i)(2-i)=b$$
$$(2+i)(2-i)p=10$$

これを解いて　　$p=2,\ a=-6,\ b=13$

したがって，他の解は　　$2,\ 2-i$

12 関数の式を変形すると　　$y=-(x-2a)^2+4a^2-a\ (0\leqq x\leqq 2)$

また　　$x=0$ のとき　$y=-a$，　$x=2$ のとき　$y=7a-4$

$x=2a$ のとき　$y=4a^2-a$

(1)　[1]　$2a<0$ すなわち $a<0$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=0$ で最大値 $-a$

[2]　$0\leqq 2a\leqq 2$ すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき

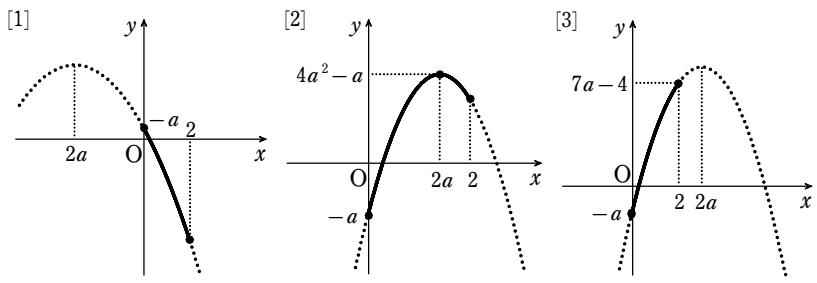
グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=2a$ で最大値 $4a^2-a$

[3]　$2<2a$ すなわち $1<a$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=2$ で最大値 $7a-4$




(2)　定義域の中央の値は 1

[1]　$2a<1$ すなわち $a<\dfrac{1}{2}$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=2$ で最小値 $7a-4$

[2]　$2a=1$ すなわち $a=\dfrac{1}{2}$ のとき

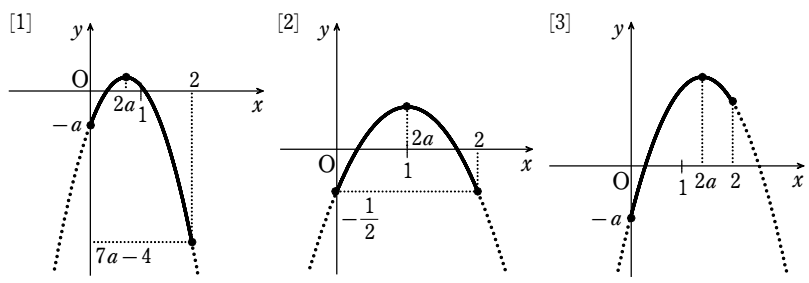
グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=0,\ 2$ で最小値 $-\dfrac{1}{2}$

[3]　$2a>1$ すなわち $a>\dfrac{1}{2}$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=0$ で最小値 $-a$




13 関数の式を変形すると　　$y=(x-1)^2+2\quad (a\leqq x\leqq a+2)$

また　　$x=a$ のとき　$y=a^2-2a+3$，　$x=a+2$ のとき　$y=a^2+2a+3$

$x=1$ のとき　$y=2$

(1)　[1]　$a+2<1$ すなわち $a<-1$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=a+2$ で最小値 $a^2+2a+3$

[2]　$a\leqq 1\leqq a+2$ すなわち $-1\leqq a\leqq 1$ のとき

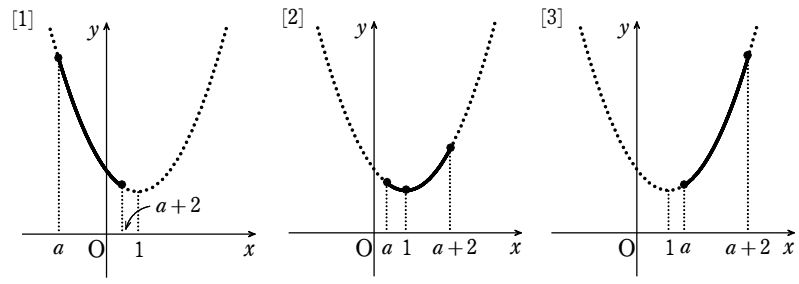
グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=1$ で最小値 2

[3]　$1<a$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=a$ で最小値 $a^2-2a+3$




(2)　定義域の中央の値は　$a+1$

[1]　$a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=a$ で最大値 $a^2-2a+3$

[2]　$a+1=1$ すなわち $a=0$ のとき

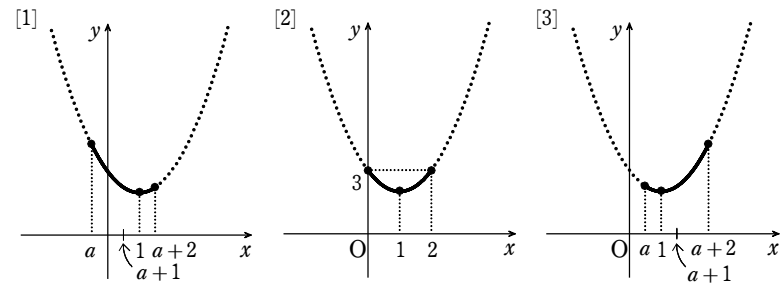
グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=0,\ 2$ で最大値 3

[3]　$1<a+1$ すなわち $0<a$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=a+2$ で最大値 $a^2+2a+3$




14 (1)　関数の式を変形すると　　$y=-\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}a^2\quad (0\leqq x\leqq 1)$

また　　$x=0$ のとき　$y=a^2$，　$x=1$ のとき　$y=a^2-a-1$，

$x=-\dfrac{a}{2}$ のとき　$y=\dfrac{5}{4}a^2$

[1]　$-\dfrac{a}{2}<0$ すなわち $0<a$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$y$ は $x=0$ で最大となるから　　$M=a^2$

[2]　$0\leqq -\dfrac{a}{2}\leqq 1$ すなわち $-2\leqq a\leqq 0$ のとき

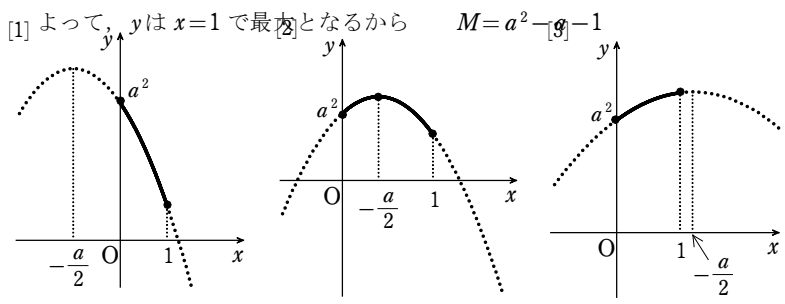
グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$y$ は $x=-\dfrac{a}{2}$ で最大となるから　　$M=\dfrac{5}{4}a^2$

[3]　$1<-\dfrac{a}{2}$ すなわち $a<-2$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$y$ は $x=1$ で最大となるから　　$M=a^2-a-1$




以上から

$a<-2$ のとき　$M=a^2-a-1$，　$-2\leqq a\leqq 0$ のとき　$M=\dfrac{5}{4}a^2$，

$0<a$ のとき　$M=a^2$

(2)　(1) の結果を利用する。

[1]　$a<-2$ のとき，$M=5$ から　　$a^2-a-1=5$　　よって　　$a^2-a-6=0$

左辺を因数分解して　　$(a+2)(a-3)=0$　　ゆえに　　$a=-2,\ 3$

これらは $a<-2$ を満たさない。

[2]　$-2 \leqq a \leqq 0$ のとき，$M=5$ から　$\frac{5}{4}a^2=5$　　よって　$a^2=4$

これを解いて　$a=\pm 2$　　$-2 \leqq a \leqq 0$ を満たすのは　$a=-2$

[3]　$0<a$ のとき，$M=5$ から　$a^2=5$

これを解いて　$a=\pm\sqrt{5}$　　$a>0$ を満たすのは　$a=\sqrt{5}$

[1]～[3]から，求める $a$ の値は　$a=-2,\ \sqrt{5}$

15 2 次方程式 $ax^2+(a-1)x+a-1=0$ の判別式を $D$ とすると

$$D=(a-1)^2-4\cdot a\cdot(a-1)$$
$$=(a-1)\{(a-1)-4a\}=-(a-1)(3a+1)$$

この 2 次不等式の解がすべての実数であるための必要十分条件は

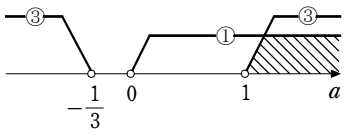
$x^2$ の係数について　$a>0$　……①

かつ　$D<0$　……②

② から　$-(a-1)(3a+1)<0$

よって　$(a-1)(3a+1)>0$

ゆえに　$a<-\frac{1}{3},\ 1<a$　……③



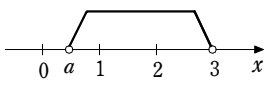

① と ③ の共通範囲を求めて　$a>1$

16 左辺を因数分解すると　$(x-a)(x-3)<0$　……①

[1]　$a<3$ のとき，① の解は　$a<x<3$

これを満たす整数 $x$ がちょうど 2 個あるとき，

その整数 $x$ は 1，2 となる。




よって　$0 \leqq a<1$

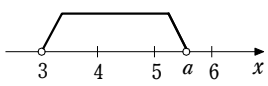
[2]　$a=3$ のとき，① は $(x-3)^2<0$ となるから，解はない。

よって，条件を満たさない。

[3]　$a>3$ のとき，① の解は　$3<x<a$

これを満たす整数 $x$ がちょうど 2 個あるとき，

その整数 $x$ は 4，5 となる。




よって　$5<a \leqq 6$

以上から，求める $a$ の値の範囲は　$0 \leqq a<1,\ 5<a \leqq 6$