オープン・ラボ　数学

「　日本ジュニア数学オリンピック（JJMO）への取り組み　」

Ⅰ　はじめに

数学科では前身の小石川高等学校の時分から、日常的に教科の準備室内にて学習コーナーを開放し、生徒が数学の学習過程で疑問に感じたことや難しく感じたことを、教員や他の生徒とともに解決できる環境を整備している。この環境下では、学年の異なる生徒がたまたま顔を合わせることも珍しくなく、上級生は、下の学年で学んだことに対して「去年はわからなかったけど、そういうことだったのか」という気づきが生まれたり、下級生は、上級生のアドバイスを取り入れて学習したりといったつながりが生まれてきた。

そのなかで特に、中等教育学校の１期生以来、数学に高い興味・関心を持つ前期課程（１～３年）の生徒を対象に、日本ジュニア数学オリンピック（ＪＪＭＯ）へ向けての勉強会を独立させて実施している。ここでは、その実践事例を報告する。

Ⅱ　学年ごとの取り組みの概要

ＪＪＭＯは毎年１月の初旬に予選が行われる。そこで、筆者の担当する２年生では、２学期に希望する有志を募り、２週間～１か月に１度程度集まって勉強会を実施することにした。本年度は２年生からは３名（冬季休業中は４名）の参加があった。一方、数学科では３年次に小石川フィロソフィーⅠを開講しており（詳細は当該項目を参照）、数学に興味や関心の高い生徒が受講している。ＪＪＭＯへの取り組みは、小石川フィロソフィーⅠのなかでも行われているので、今年は、冬季休業を利用し、２年生の勉強会と３年生有志の勉強会を合同にした形で、サイエンス・カフェの活用も行った（詳細は当該項目を参照）。

勉強会では、主に数学オリンピック財団発行の問題集や、財団発行の機関紙「JUNIOR math OLYMPIAN」に掲載された問題を持ち寄って、教員も加わってあれこれと考えていく、形式ばらないスタイルをとっていった。これは、１期生の頃からさほど変わっていないと思われる。ＪＪＭＯに出題される問題の内容は、いずれも中学校３年生までの学習内容を中心としたものであるため、本校のカリキュラムにおいては２年の２学期であればおおよそ立ち向かえる「道具」はそろった状態である。もっとも、三平方の定理など、３学期にならないと学習しない内容も含まれるため、それらについてはその都度現地調達していくことになる。数学にもともと興味・関心の高い生徒だけあって、なかにはかなり先の内容まで自ら学習している生徒もおり、時折その生徒を先生役にしながら、新たな知識をその都度獲得していくこともあった。この過程は、友達から学べるという意味で生徒にとって大きな刺激とな jy るもののようであり、教える生徒もまた、試行錯誤して教えることにより、対象への理解を深めていく様子が見て取れた。

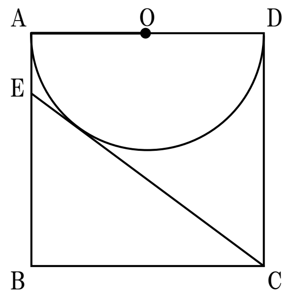
予選は３時間で 12 題の問題を解く形式になっているが、この勉強会では放課後の１時間半程度で多くても３問程度、少ないときは１問をひたすら考えるというときもあった。

Ⅲ　実際の問題と取り組みの例

ここでは、２年生の勉強会で扱った問題のなかから、１題取り上げる。

【2008 年ＪＪＭＯ予選　5.】

一辺１の正方形 ABCD がある。AD を直径とする円を O とし、辺 AB 上の点 E を、直線 CE が円 O の接線となるようにとる。三角形 CBE の面積を求めよ。



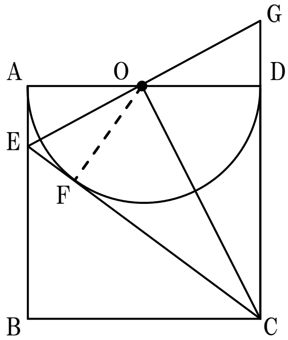
この問題に対して、３名のそれぞれが三者三様の補助線を引きながら取り組んでいったが、そのなかで、この図形に関する性質がいろいろと浮かび上がってきた。例えば、次のようなものである。

次ページのように、円と直線 CE の接点を F とする。このとき、EF＝EA、CF＝CD であるから、図のように EO の延長と CD の延長の交点を G とすると、△ECG は

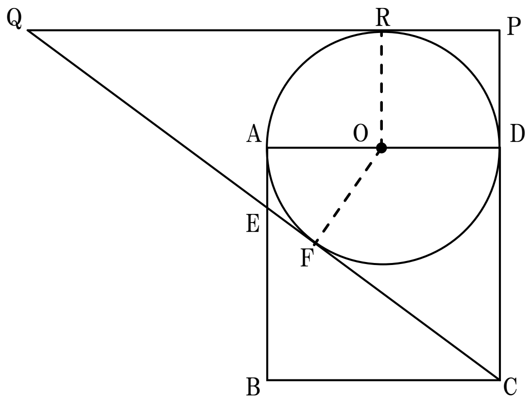
CG＝CEの二等辺三角形となる。また、OはADの中点であるから、△AOE≡△DOGとなり、台形AECDの面積は、△ECGの面積と等しい。さらに、二等辺三角形の底辺の中点がOであるため、EO⊥COである。このことから、△COD∽△CGOが導かれ、GO：OC＝1：2、すなわちEG＝CO＝$\frac{\sqrt{5}}{2}$であることも得られるから、

△ECG＝$\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$となり、求める

△EBCの面積は$1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$とわかった。



また別の生徒は、この図の中の円が半円であることから、なにげなくもう半分の円をかきたしてみたところ、新たな解法を発見した。



図のようにCE、CDを延長し、円Oに外接する三角形QCPをつくる。このとき、CD＝CF＝1、PD＝PR＝$\frac{1}{2}$である。また、QR＝QFであるから、この長さをxとおくと、△QCPにおいて三平方の定理

$\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=(1+x)^2$が成り立つ。

これを解くと$x=\frac{3}{2}$を得るので、QP＝2、CP＝$\frac{3}{2}$である。△QCPと△EBCは相似であり、その相似比は2：1であるから、これにより△EBCの面積が求められる。

Ⅳ 成果と課題

本稿で取り上げた事例においては、半円をかきたして円にした生徒の発想がきっかけになり、「三辺の長さが３、４、５である直角三角形の内接円の半径は１である」という有名な性質に至ったが、問題を１つの側面だけからとらえていては、この問題場面に３：４：５の直角三角形がひそんでいることには気づけなかったかもしれない。いわゆる教科書どおりの解き方でいえば、AEの長さをxとおいて三平方の定理を用いるのがオーソドックスなものであるが、三平方の定理が未習であり、このタイプの問題にまだ習熟していない２年生の２学期という段階だからこそ、かえって自由な発想でこの問題場面をとらえられたとも考えられる。筆者自身も、生徒とともに楽しみながら問題を吟味することができた。

また、普段ひとりで問題を解くことが多い生徒にとって、友達と１つの問題に正対し、ともにコミュニケーションをとりあって解いていくという経験は大いに刺激になったようである。「数学好き」とひとことで言っても、数学のどのような側面が好きかは生徒によって異なるし、興味の向き方も違う。当然、１つの問題に対するアプローチも違ってくる。そうした生徒たちが、ともに考える過程を言葉にし、伝え合っていくことで、新たな数学の面白さや美しさに気づいていく様子が、勉強会を通して節々に感じ取れた。また、１問に贅沢に時間を使っていけることも、授業とは違った魅力を生徒に提示しているようであった。ＪＪＭＯの過去問には、それに応えうる良問がそろっているので、今後とも大切にしたい。

今年はＪＪＭＯの予選を通過する生徒は残念ながら現れなかったが、２年生には来年もチャンスがある。より多くの生徒の参加に期待することはもちろん、今年勉強会に参加した生徒が、その経験を次へ、そして後輩にも伝えていけるような場を提供することが、今後の課題である。