

5

第3章 2次関数

関数の下ごしらえいろいろ

📖 数学 I …pp.74-81 4STEP 数学 I + A (数学 I 編) …121~130

またまた単元が変わります。ここからは 2 次関数の世界に足を踏み入れます。高校数学のどの単元も、2 次関数のお話が基本となるので、ぜひとも完璧にマスターしてもらいたいです。

が、その前に、下準備をしておきましょう。どんな RPG でも、街で装備を整えておかないと、序盤の敵にやられてしまいます。それと同じです。

🔄 復習 関数とはそもそも…

2 つの変数 x, y について、 x の値を**決める**と、それに対応して y の値が**ただ 1 つに決まる**とき、「 y は x の関数である」というのでした。

1 便利な記号をおひとつ。

これまで扱ってきた関数についての学習では、それらの関数を式で表現してきました。例えば、 $y = -2x + 3$ なんて形の式は、1 次関数を表すのでしたね。

例 1 1 次関数 $y = -2x + 3$ において、 $x = 2$ のときの y の値を求めなさい。

基本中の基本ですね。 x に 2 を代入して

$$y = -2 \times 2 + 3 = -4 + 3 = -1$$

と計算できるワケです。このことを

「 $x = 2$ のとき $y = -1$ である」……①

と表現していましたね。

このことを、今後は $f(x)$ という記号を使って、表現し直してみます。

例 1 の別表現！

例 2 1 次関数 $f(x) = -2x + 3$ において、 $f(2)$ の値を求めなさい。

慣れないうちは風変わりな表現だと感じるのですが、やっていることは例 1 とまったく同じです。つまり

$$f(2) = -2 \times 2 + 3 = -1$$

と計算しなさい、っていう記号なんです。そうすると、①は

「 $f(2) = -1$ 」← 関数 $f(x)$ の $x = 2$ における値といいます。

とスッキリ表現できます。

例 3 関数 $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ について

(1) $f(5) = 2 \times 5^2 - 6 \times 5 + 5 = 25$

(2) $f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 5 = 13$

(3) $f(a+1) = 2(a+1)^2 - 6(a+1) + 5 = 2a^2 - 2a + 1$

文字に文字を代入するテクニックは今後使います。

💡 関数の記号

y が x の関数であることを、文字 f などを用いて $y = f(x)$ と表します。単に「関数 $f(x)$ 」ということもあります。

f は関数を意味する function の頭文字です。

🗨️ コメント この記号についてもうちょっとっておこう

$f(x)$ は、「文字 x を使って表された何らかの式」という意味です。その式の形が具体的にわかっているなら、例えば「関数 $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ 」のように書くことができます。もし、 $f(t)$ と書けば、それは t で表された式ということになります。

また、同じ x で表された式であっても、式の形が異なれば、 $g(x)$ 、 $h(x)$ などとも書きます。 f 、 g 、 h などの記号は、その関数に付けられた“名前”と考えてもよいでしょう。

2 値が制限された関数のお話

関数 $y = f(x)$ を考えるとき、いつも x はどんな値でもとりうるとは限りません。値を一部に制限することもあります。それによって、当然 y の値も制限されることになります。

覚えておけ！ 定義域、値域

関数 $y = f(x)$ において、変数 x のとりうる値の範囲を、この関数の**定義域**といいます。また、 x が定義域全体を動くとき、 y がとりうる値の範囲を、この関数の**値域**といいます。

中学数学では、「 x の変域」と呼ぶのが一般的です。

中学数学では、「 y の変域」と呼ぶのが一般的です。

関数 $y = f(x)$ の定義域が $a \leq x \leq b$ であるとき

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

のように書くのが一般的です。特に定義域を断らないときは、その関数の定義域は $f(x)$ の値が定まるような実数 x の全体とします。

例 4 関数 $y = 2x$ の定義域は、実数全体

関数 $y = \frac{1}{x}$ の定義域は、0 以外の実数全体

比例です。

反比例です。

これを「 $x \neq 0$ 」と書くのもアリ。
反比例は $x = 0$ で定義されません。

3 グラフの舞台を用意しよう！

中学数学でも扱った座標の考え方。改めて整理しておきましょう。

覚えておけ！ 座標平面

座標軸が定められた平面を**座標平面**といいます。

座標平面上の点は、右の図のように、 x 軸、 y 軸のそれぞれの値を読んで、2 つの実数の組 (a, b) で表されます。この組 (a, b) を点 P の座標といい、

$$P(a, b)$$

と書きます。

また、座標軸で分けられた 4 つの部分を、右の図のように**第 1 象限**、**第 2 象限**、**第 3 象限**、**第 4 象限**と呼びます。

ちなみに、点 (x, y) が

第 1 象限上の点…… $x > 0, y > 0$

第 2 象限上の点…… $x < 0, y > 0$

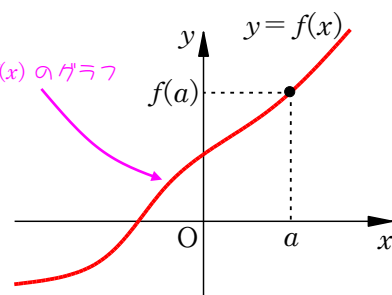
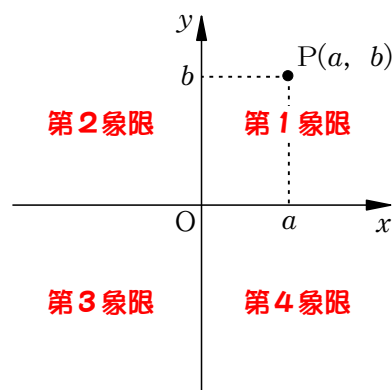
第 3 象限上の点…… $x < 0, y < 0$

第 4 象限上の点…… $x > 0, y < 0$

です。

一般に、関数 $y = f(x)$ が与えられたとき、関数 $y = f(x)$ を満たすような点 (x, y) 、すなわち点 $(x, f(x))$ 全体で作られる図形を、この関数の**グラフ**といいます。

点 (a, b) が関数 $y = f(x)$ のグラフ上にあることは、関係 $b = f(a)$ が成り立つことと同じです。



では、定義域・値域とグラフを絡めた問題にチャレンジしてみましょう。

例題 1 値域から 1 次関数の決定

★★★★☆

1 次関数 $y = ax + b$ ($-2 \leq x < 1$) の値域が $1 < y \leq 7$ であるとき、定数 a, b の値を求めよ。

? ナイスな思考プロセス

まず注目していただきたいのが、ここです！！

不等号の種類から、 $x = 1$ と $y = 1$ が対応することがわかります。

つてことは、 $x = -2$ と $y = 7$ が対応することになりますネ。

これを座標平面の言葉で表すと……

$y = ax + b$ のグラフが点 $(1, 1)$ と $(-2, 7)$ を通る！！

つてことです。

さて、ここまでわかった時点で、状況を図で整理しましょう。

2 点 $(-2, 7)$, $(1, 1)$ を通る 1 次関数のグラフ (直線のグラフ) は、右の図のように右下がりの直線になるしかないので！！

で！

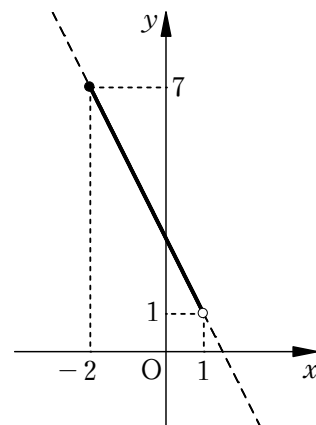
点 $(-2, 7)$ は●, 点 $(1, 1)$ は○ ← 不等号「 $\leq$ 」に注目！
← 不等号「 $<$ 」に注目！

となります。

ここまでできればあとは簡単。

$y = ax + b$ に $(-2, 7)$ と $(1, 1)$ を代入すれば終わりです。

続きは答案にて。



III 答案

1 次関数 $y = ax + b$ ($-2 \leq x < 1$) の値域が $1 < x \leq 7$ となるのは、グラフが 2 点 $(-2, 7)$, $(1, 1)$ を通るときであり、このとき $a < 0$ である。

したがって

$$\begin{cases} 7 = -2a + b \\ 1 = a + b \end{cases}$$

これを解いて $a = -2$, $b = 3$ (これは $a < 0$ を満たす) **答**

ちょっとコメント 最大値、最小値

今の例題に関連して、最大値・最小値のお話をしておきましょう。

関数の値域に最大の値があるとき、これをこの関数の**最大値**と申します。また、値域に最小の値があるとき、これを**最小値**と申します。

今回の例題で扱った 1 次関数 $y = -2x + 3$ ($-2 \leq x < 1$) では、

最大値は 7 ← $y = 7$ が値域の最大です。

となります。では最小値はどうでしょう？

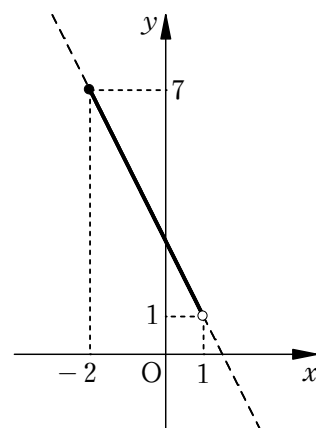
一見、最小値は 1 のような気がします。

が、そうではありません。

グラフの○の部分を見てもわかるように、 $y = 1$ にはなりません、 $y = 1$ にいくらでも近づく、という現象が起きています。

そのため、“最も小さい値” がピシッと決まらないのです。

よって、この関数の最小値はありません。



では、応用編へとまいりましょう。

例題 2 値域から 1 次関数の決定

★★★★☆

関数 $y = ax + b$ ($-2 \leq x \leq 1$) の値域が $1 \leq y \leq 7$ であるとき、定数 a , b の値を求めよ。

? ナイスな思考プロセス

前問とソックリですが、異なる点が 2 つ。

そのイチ 先頭の「1 次」がなくなっている！！

そのニツ 不等号がどちらも $\leq$ になっている！！

こいつらのおかげで、難易度がアップします。

4 ◆ Advanced 代数III

まず、**そのイチ** ですが……

「1次」がなくなって、ただの「関数」になった！

$a=0$ の場合もあり得る！！

このとき、関数の式は $y=b$ となり、定数関数となります。つまり、ただの「関数」なので、1次関数とは限らないのです！

で、**そのニツ** なんですか……

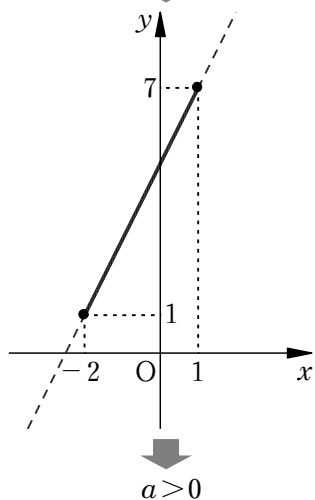
不等号がすべて $\leq$ になった！

$x=-2$ が $y=1$ に対応するのか $y=7$ に対応するのかがわからない！！

つつうことで、場合分けが必要となります。

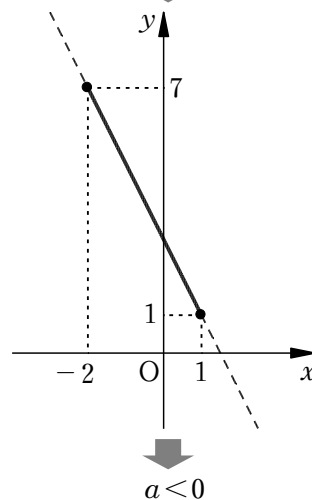
[1] $x=-2$ が $y=1$ に対応する場合

$x=1$ は $y=7$ に対応する！



[2] $x=-2$ が $y=7$ に対応する場合

$x=1$ は $y=1$ に対応する！



よって、結局のところ、 $a > 0$ 、 $a = 0$ 、 $a < 0$ の3パターンを考えなくてはなりません。

III 答案

[1] $a=0$ のとき

$y=b$ となり、値域が $1 \leq y \leq 7$ となることはない。

横一直線の平らなグラフなので、値域がこうなることはない！

[2] $a > 0$ のとき ← **右上がりの場合**

値域が $1 \leq y \leq 7$ となるのは、グラフが2点 $(-2, 1)$ 、 $(1, 7)$ を通るときであるから

$$\begin{cases} 1 = -2a + b \\ 7 = a + b \end{cases}$$

よって $a=2$ 、 $b=5$

これは、 $a > 0$ を満たす。 ← **この確認を忘れずに。**

[3] $a < 0$ のとき ← **右下がりの場合**

値域が $1 \leq y \leq 7$ となるのは、グラフが2点 $(-2, 7)$ 、 $(1, 1)$ を通るときであるから

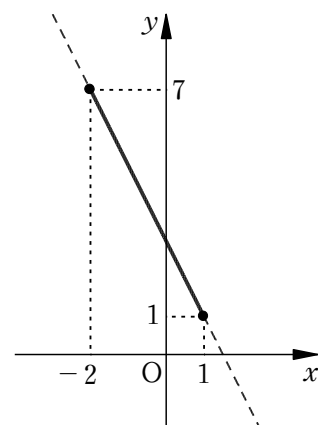
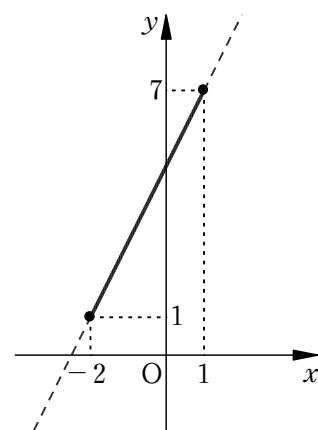
$$\begin{cases} 7 = -2a + b \\ 1 = a + b \end{cases}$$

よって $a=-2$ 、 $b=3$

これは、 $a < 0$ を満たす。 ← **こちらもち。**

[1]～[3]より、求める a 、 b の値は

$(a, b) = (2, 5), (-2, 3)$ 答



6

第3章 2次関数

何はともあれ平方完成

数学 I …pp.82-87 4STEP 数学 I + A (数学 I 編) …131~138

これから先、2 次関数を学ぶ上で必須のテクニックを紹介します。これが今日中にできるようになっておかないと、この先にそびえ立つ 2 次関数の山の踏破は**不可能**です！！絶対にできるようになってください！

1 座標平面をアチコチ旅する放物線

2 年生のときに学んだ関数 $y=ax^2$ のグラフは、**放物線**と呼ばれる曲線でした。で、このグラフは必ず原点を通り、 y 軸について線対称なグラフでしたね。

これから主に扱っていくのは、関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフですが、結論から言うと、このグラフはやはり放物線になります。ただし、原点を通るとは限らず、座標平面上をいろいろ移動していくのです。

ということで、アチコチ移動する放物線を表現するのに便利な用語を紹介しておきましょう。

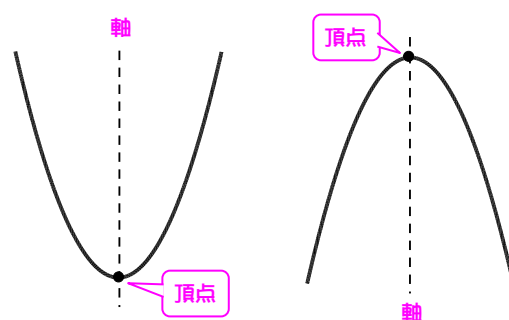
覚えるべし！ 軸、頂点

放物線の対称軸をその放物線の**軸**、放物線と軸との交点をその放物線の**頂点**といいます。

関数 $y=ax^2$ では、頂点は原点、軸は y 軸と一致していたので、特に軸・頂点の用語を意識しなくても済んでいました。

が、ここからは放物線が移動するもので、つねに軸・頂点を意識するクセをつけておきましょう。

で、なんでこれらの点や直線が大事なのかと申しますと……。



これを**覚える！！**

放物線の軸と頂点

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ を、 $y=a(x-p)^2+q$ と表すことができれば、
軸は直線 $x=p$ 、頂点の座標は (p, q) とな～る！！
 y 軸に平行な直線。

ちなみに、 $a>0$ のとき

下に凸

の形

$a<0$ のとき

上に凸

の形

では、式の見方を…。

例 1 2 次関数 $y=3(x-2)^2+8$ の頂点の座標と軸の方程式は？

$$y=3(x-2)^2+8$$

コイツがそのまま頂点の y 座標！

コイツは無視！

カッコの中身を 0 にする x の値は $x=2$

コイツが頂点の x 座標！

よって、頂点の座標は $(2, 8)$ 、軸は直線 $x=2$ でございます！

例 2 2 次関数 $y=-2(x+3)^2-5$ の頂点の座標と軸の方程式は？

$$y=-2(x+3)^2-5$$

コイツがそのまま頂点の y 座標！

コイツは無視！

カッコの中身を 0 にする x の値は $x=-3$

コイツが頂点の x 座標！

よって、頂点の座標は $(-3, -5)$ 、軸は直線 $x=-3$ でございます！

ちょっとコメント a の値は？

頂点の座標と軸を求める上では不要な情報ですが、 $y=a(x-p)^2+q$ の a の値は、**放物線の形**を制御する値だと思っておいってください。
上に凸 or 下に凸とか、放物線の開き具合とか。

2 では、本題へまいりましょう。

2 次関数の式が、始めから $y=a(x-p)^2+q$ の形になっていれば、頂点の座標や軸の式を求めるのは簡単なのですが、世の中そう簡単にはいきません。

2 次関数は一般的に、 $y=ax^2+bx+c$ の形で表される関数でした。

ただ、この形のままで頂点の座標が求められないので、何とかして $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形する必要があるてくるわけです。

例題 1 平方完成

★★★★☆

2 次関数 $y=2x^2-12x+7$ の頂点の座標と、軸の方程式を求めよ。

? ナイスな 思考プロセス

頂点の座標を特定するためには

$$y=ax^2+bx+c \longrightarrow y=a(x-p)^2+q$$

の変形が必要です。

ここでは、この変形の手順を伝授しましょう。

スタート! $y=2x^2-12x+7$

手順イチ 右辺の最初の 2 項のみを x^2 の係数でくくる!

$$y=2(x^2-6x)+7 \quad \leftarrow y=\{2x^2-12x\}+7$$

この部分だけを先頭の 2 でくくります。

手順ニツ () 内の x の係数の半分の 2 乗を加えて、すぐ引く!

$$y=2(x^2-6x+9-9)+7$$

-6 の半分、つまり -3 の 2 乗 $(-3)^2=9$ を加えて、すぐ引く!

手順サン () 内の前の 3 項が必ず 2 乗の形になる!

$$y=2\{(x-3)^2-9\}+7$$

もともと x^2-6x+9 だった部分です。

ゴール! $y=2(x-3)^2-18+7$

$$\longrightarrow y=2(x-3)^2-11$$

$y=2\{(x-3)^2-9\}+7$ の分配法則だよ!

つーことで、頂点は (3, -11), 軸は直線 $x=3$ だよ!

この変形を、人呼んで**平方完成**と申します!

平方完成は 2 次関数を手懐けるために必須のスキルなので、確実に覚えておきましょう!

III 答案

$$y=2x^2-12x+7$$

$$y=2(x^2-6x)+7$$

$$y=2(x^2-6x+9-9)+7 \quad \leftarrow \text{ココがポイント! } -6 \text{ の半分 } -3 \text{ の 2 乗, つまり } 9 \text{ を加えてすぐ引く!}$$

$$y=2\{(x-3)^2-9\}+7$$

$$y=2(x-3)^2-18+7$$

$$y=2(x-3)^2-11$$

よって、頂点の座標は (3, -11), 軸の方程式は $x=3$ **答**

ちょっとコメント 細かい表現ですが...

問題で、「軸を求めなさい」と言われた場合と「軸の方程式を求めなさい」と言われた場合では、答え方がちょっと違います。

前者は「直線 $x=3$ 」, 後者は「 $x=3$ 」となります。ビミョーな違いですが、結構大事なことですよ。

3 グラフをかいてみようよ！

いよいよグラフをかいてみるぜ！

例題を通じて、かき方を理解してもらいましょう。

例題2 グラフのかき方マニュアル

★★★★☆

2 次関数 $y=2x^2-12x+16$ について、

- (1) 頂点の座標を求めよ。
- (2) 軸の方程式を求めよ。
- (3) x 軸との交点の座標を求めよ。
- (4) y 軸との交点の座標を求めよ。
- (5) この 2 次関数のグラフをかけ。

? ナイスな 思考プロセス

最初に…

$y=2x^2-12x+16$ $\longrightarrow$ グラフは  の形！

x^2 の係数が正です。

- (1) 頂点は、先ほどやった平方完成が大活躍です。

$$y=2x^2-12x+16$$

$$y=2(x^2-6x)+16$$

$$y=2(x^2-6x+9-9)+16$$

$$y=2\{(x-3)^2-9\}+16$$

$$y=2(x-3)^2-2$$

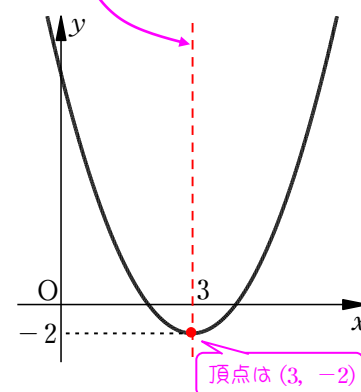
よって、頂点の座標は $(3, -2)$ です！

これが軸です！

2 次関数のグラフは、このラインに関して対称です。

- (2) (1)で頂点が $(3, -2)$ と求めた時点で、グラフのイメージが右のようになりますね？

ということで、軸の方程式は $x=3$ でございます。



- (3) x 軸とは、言い換えると直線 $y=0$ のことです。

そこで、 y のところに 0 を代入して…

$$0=2x^2-12x+16$$

として、この式から x を求めれば OK なのです。では、解いてみましょう。

$$2x^2-12x+16=0$$

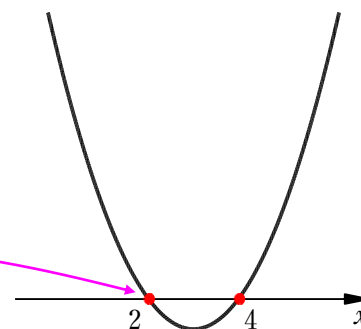
$$x^2-6x+8=0$$

$$(x-2)(x-4)=0$$

$$\therefore x=2, 4$$

イメージはこんな感じです。

よって、 x 軸との交点の座標は $(2, 0), (4, 0)$

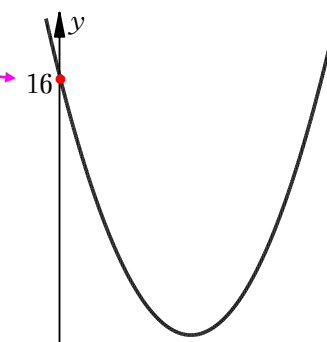


- (4) 今度は y 軸。これは直線 $x=0$ のことです。よって、 x に 0 を代入したらオシマイ。

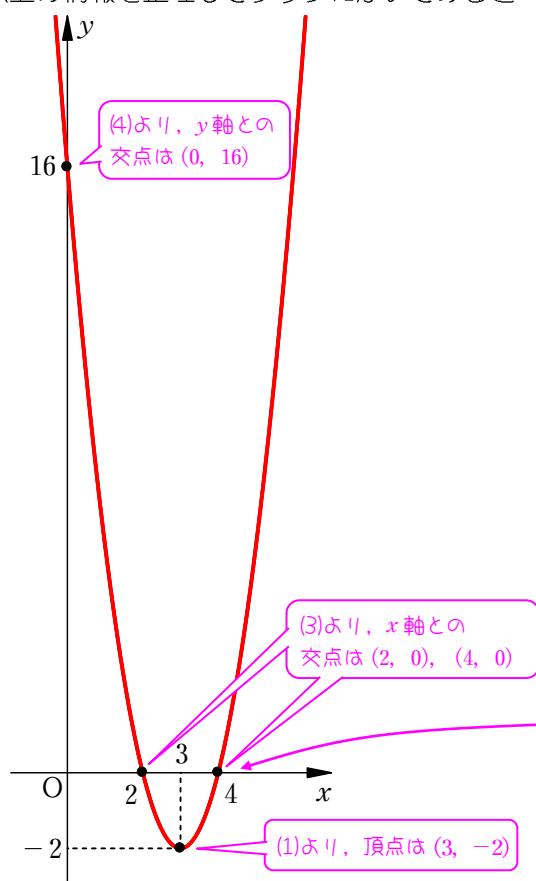
$$y=2 \times 0^2 - 12 \times 0 + 16 = 16$$

ということで、 y 軸との交点の座標は $(0, 16)$ です！

イメージはこんな感じです。



(5) 以上の情報を整理してグラフにかいてみると……。



グラフ5カ条

 $a > 0$ のとき。 $a < 0$ のとき。

第1条 下に凸か上に凸かを見極めるべし。

第2条 グラフの頂点を求めるべし。

第3条 x 軸との交点の座標を求めるべし。第4条 y 軸との交点の座標を求めるべし。

第5条 これらの点を滑らかな曲線で結ぶべし。

滑らかな曲線……とは言っても、人間の手でかくのは正確ではありません。グラフの特徴を押さえながら「だいたいの形」をかくことになります。この「だいたいの形」を、グラフの概形といいます。

軸との交点がキタナイ数になる場合、軸上の点以外のわかりやすい点の座標をとっても OK です。

■ 解答

(1) $(3, -2)$ 答(2) $x=3$ 答(3) $(2, 0), (4, 0)$ 答(4) $(0, 16)$ 答

(5) 上の図 答

例題3 グラフの平行移動

★★★★☆

放物線 $y=x^2+2x+2$ は、どのように平行移動すると放物線 $y=x^2-4x+1$ に重なるか。

? ナイスな思考プロセス

まず注目していただきたいのが、 x^2 の係数です。

移動前も移動後も 1 で、等しくなっています。 x^2 の係数は放物線の形を制御する定数ですので、どちらも等しいということは、うまく移動すればぴったり重なることができるつつうことです。

放物線を重なるってことは……その特徴とも言える頂点を重ねるってことに他なりません！

頂点……ということは、そう！ 平方完成の登場です。

つてなワケで、放物線 $y=x^2+2x+2$ ……① と放物線 $y=x^2-4x+1$ ……② を平方完成してみましょう。

①は $y=x^2+2x+2$

$$=(x^2+2x+1-1)+2 \leftarrow x \text{ の係数 } 2 \text{ の半分の } 2 \text{ 乗, つまり } 1 \text{ を加えておぐ引く!}$$

$$=(x+1)^2-1+2$$

$$=(x+1)^2+1 \quad \text{となるので, 頂点は } (-1, 1)$$

②は $y=x^2-4x+1$

$$=(x^2-4x+4-4)+1 \leftarrow x \text{ の係数 } -4 \text{ の半分の } 2 \text{ 乗, つまり } 4 \text{ を加えておぐ引く!}$$

$$=(x-2)^2-4+1$$

$$=(x-2)^2-3 \quad \text{となるので, 頂点は } (2, -3)$$

ということで、 $(-1, 1)$ を $(2, -3)$ に移すためにどうすりゃいいか考えれば OK です！！

上に凸 or 下に凸, 放物線の開き具合。

▶ **答案**

$$y=x^2+2x+2 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}, \quad y=x^2-4x+1 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

とする。放物線①を平行移動して放物線②に重ねると①の頂点は②の頂点に重なる。

$$\textcircled{1}\text{から} \quad y=(x+1)^2+1$$

$$\textcircled{2}\text{から} \quad y=(x-2)^2-3$$

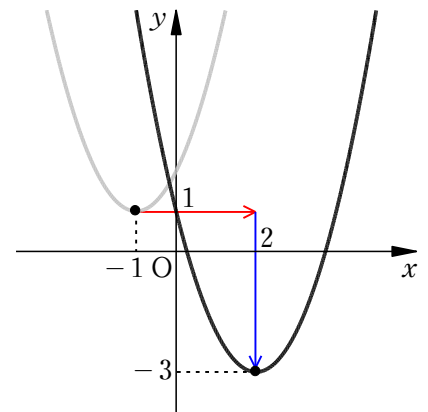
よって、①の頂点は点 $(-1, 1)$ ，②の頂点は点 $(2, -3)$ である。

放物線①を x 軸方向に p ， y 軸方向に q だけ平行移動したとき、放物線②に重なる」とすると

$$-1+p=2, \quad 1+q=-3$$

$$\text{これを解いて} \quad p=3, \quad q=-4$$

したがって、 **x 軸方向に 3， y 軸方向に -4 だけ平行移動すればよい。** 答



「どのように平行移動」と聞かれたら、「 x 軸方向に○， y 軸方向に△」と答えます。ちなみに「 x 軸（ y 軸）方向」とは、「 x 軸（ y 軸）の正の方向」という意味です。

7

第3章 2次関数

グラフがあっちこっちに移動します

数学 I …pp.88-91 4STEP 数学 I + A (数学 I 編) …139~144

「移動」と言えば、平行移動、対称移動、回転移動の3つを考えるわけですが、関数のグラフの回転移動はあまりにもハイレベルすぎるので、現時点では扱いません。

ここでは、胃に優しい平行移動と対称移動を主に扱います。

1 グラフの平行移動は必殺技がオススメ

いきなりですが、例題です。

例題 1 グラフの平行移動

★★★★☆

放物線 $y=2x^2-4x+3$ を x 軸方向に 3, y 軸方向に 2 だけ平行移動させたときの放物線の方程式を求めよ。

? ナイスな
思考プロセス

まず、ポイントが一つ。

平行移動しても $y=ax^2+bx+c$ の a は**変わらない**！ってことです。

で、さらにポイントが。実はこの問題、解き方が2通りあります。

方針 イチ 一応正攻法。頂点を動かせ！

まずは頂点を求めましょう。おなじみの平方完成です。

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 4x + 3 \\ &= 2(x^2 - 2x) + 3 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3 \\ &= 2(x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

よって、頂点の座標は $(1, 1)$ と求まります。

図を見れば一発ですが、まあ図がなくても

$$(1+3, 1+2) = (4, 3)$$

と求めることもできます。……ということで、平行移動後の放物線の方程式は

$$y = 2(x-4)^2 + 3$$

です！

さらに、これを展開すると

$$y = 2x^2 - 16x + 35$$

となります。

方針 ニツ 必殺技を使う。

何を言っているかわからないと思いますが、まずは結論から。

理由はのちほど。

グラフの平行移動

関数 $y=f(x)$ のグラフを、 x 軸方向に α , y 軸方向に β だけ平行移動したグラフの方程式は

$$y-\beta=f(x-\alpha)$$

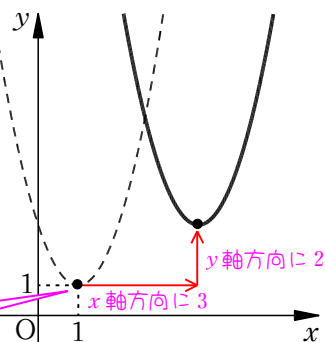
となります！

これが言っていることは、もとの関数の式で

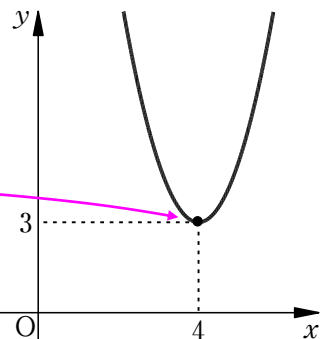
x を $x-\alpha$ に, y を $y-\beta$ に置き換えよ！！

ってことです。

a は、グラフの形（開き具合など）を制御しているところです。
グラフが移動しても形が変わるわけではないので、 a は変わりません。



頂点だけに注目！



平行移動後の頂点は $(4, 3)$ ですよ！

これが平行移動前の
頂点です。

では、本問で実践してみます。

$$y = 2x^2 - 4x + 3 \quad \text{平行移動前の放物線の方程式}$$

x 軸方向に 3 ← この 3 が α

y 軸方向に 2 ← この 2 が β

$$y-2 = 2(x-3)^2 - 4(x-3) + 3 \quad \text{平行移動後の放物線の方程式}$$

これを展開して整理すると……

$$y = 2x^2 - 16x + 35 \quad \text{確かに方針 1 の答えと一致した！}$$

■ 答案

$$y = 2x^2 - 4x + 3$$

$$= 2(x-1)^2 + 1 \quad \text{平方完成です。この問題は、平方完成そのものが本質ではないので、途中の計算は省いても答案としては十分です。}$$

よって、頂点の座標は (1, 1)

x 軸方向に 3, y 軸方向に 2 だけ平行移動させたときの移動後の頂点の座標は

$$(1+3, 1+2) \quad \text{より} \quad (4, 3)$$

となる。

よって、求める放物線の方程式は

$$y = 2(x-4)^2 + 3 \quad \text{展開せずに、このまま答えでも問題ありません。}$$

$$\therefore y = 2x^2 - 16x + 35 \quad \text{答}$$

■ 別解

放物線 $y = 2x^2 - 4x + 3$ を x 軸方向に 3, y 軸方向に 2 だけ平行移動させるのであるから、求める放物線の方程式は

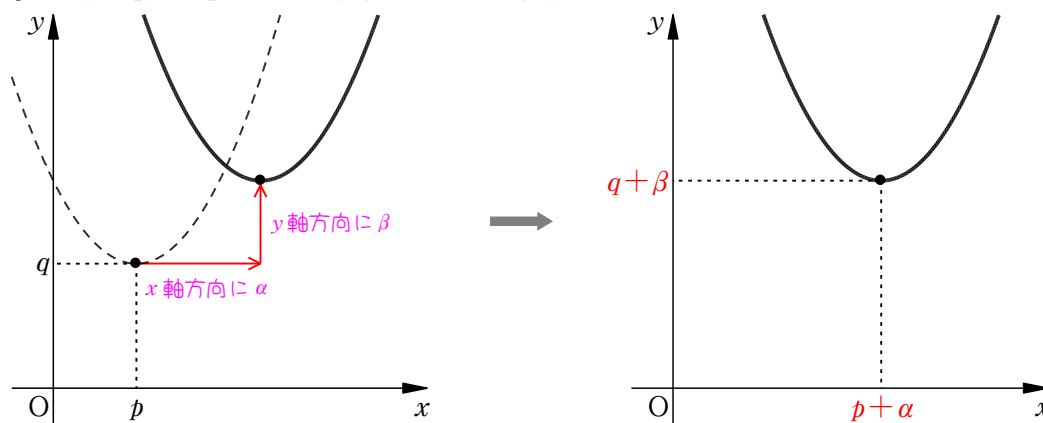
$$y - 2 = 2(x - 3)^2 - 4(x - 3) + 3$$

$$\therefore y = 2x^2 - 16x + 35 \quad \text{答} \quad \text{移動する長さがプラスならここはマイナス。マイナスならプラスにするよ。}$$

必殺技、便利でしょ？

ちょっとコメント 必殺技。その舞台裏

放物線 $y = a(x-p)^2 + q$ を、「 x 軸方向に α , y 軸方向に β 」だけ平行移動してみます。つまり……



そうすると、平行移動後の頂点は $(p+\alpha, q+\beta)$ となりますよね。

ということは、移動後の放物線の方程式は

$$y = a\{x - (p+\alpha)\}^2 + (q+\beta)$$

です。これを少し変形すると…… $y - \beta = a\{(x - \alpha) - p\}^2 + q$ となる！

つまり…

$$\begin{array}{ccc} \text{＜移動前＞} & \xrightarrow{x \text{ 軸方向に } \alpha, y \text{ 軸方向に } \beta} & \text{＜移動後＞} \\ y = a\{x - p\}^2 + q & \longrightarrow & y - \beta = a\{(x - \alpha) - p\}^2 + q \end{array}$$

となって、確かに x を $x - \alpha$ に、 y を $y - \beta$ に置き換えたものになっています。

2 符号が変わるよ、対称移動

いきなり例題から。

例題2 グラフの対称移動

★★★★☆

放物線 $C: y=2x^2-8x+9$ があるとき、次の(1)~(3)に関して C と対称な放物線の方程式を求めよ。(1) x 軸(2) y 軸

(3) 原点

? ナイスな 思考プロセス

グラフを活用してヴィジュアル面から攻めてもいいのですが、この手の問題には超簡単な必殺技があります！ いきなりそれを紹介してしましましょう。

(1) x 軸に関して対称では…… x 座標は変化しないのに対して、 y 座標の符号が変わる！

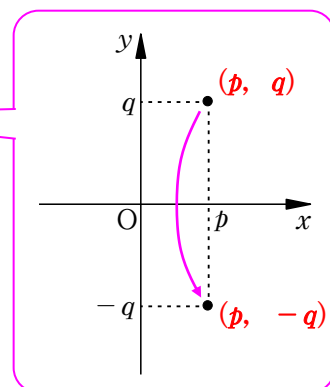
この動きがグラフ上のすべての点で当てはまるから

必殺技その1 $y \rightarrow -y$ に置き換える！

本問の場合は

$$-y = 2x^2 - 8x + 9$$

$$\therefore y = -2x^2 + 8x - 9$$

(2) y 軸に関して対称では…… y 座標は変化しないのに対して、 x 座標の符号が変わる！

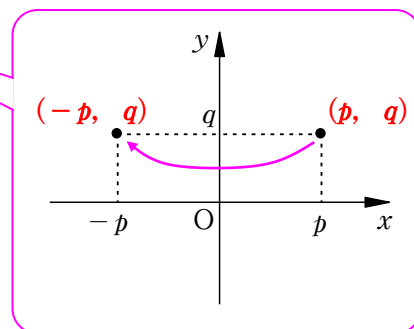
この動きがグラフ上のすべての点で当てはまるから

必殺技その2 $x \rightarrow -x$ に置き換える！

本問の場合は

$$y = 2(-x)^2 - 8(-x) + 9$$

$$\therefore y = 2x^2 + 8x + 9$$



(3) 原点に関して対称では……

 x 座標、 y 座標ともに符号が変わる！

この動きがグラフ上のすべての点に当てはまるから

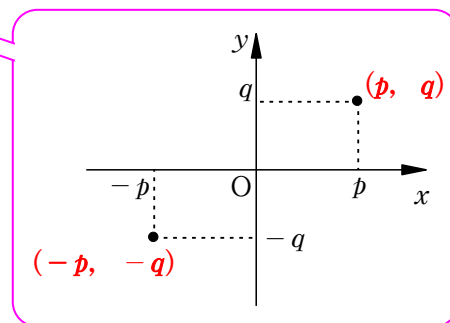
必殺技その3 $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ のダブル置き換え！

本問の場合は

$$-y = 2(-x)^2 - 8(-x) + 9$$

$$-y = 2x^2 + 8x + 9$$

$$\therefore y = -2x^2 - 8x - 9$$



III 答案

$$C: y = 2x^2 - 8x + 9$$

(1) C を x 軸に関して対称移動させると

$$-y = 2x^2 - 8x + 9$$

$$\therefore y = -2x^2 + 8x - 9 \quad \text{答}$$

(2) C を y 軸に関して対称移動させると

$$y = 2(-x)^2 - 8(-x) + 9$$

$$\therefore y = 2x^2 + 8x + 9 \quad \text{答}$$

(3) C を原点に関して対称移動させると

$$-y = 2(-x)^2 - 8(-x) + 9$$

$$-y = 2x^2 + 8x + 9$$

$$\therefore y = -2x^2 - 8x - 9 \quad \text{答}$$

ちょっとコメント 座標軸以外の直線や、原点以外の点に関する対称移動は？

こんな例を考えてみましょう。

例 1 放物線 $y=2x^2-4x+5$ を、直線 $y=1$ に関して対称移動した放物線の方程式は？

これは x 軸対称、 y 軸対称、原点对称というわけではないので、上記の必殺技が使えません。というわけで、しっかりグラフをかいて図から導くのが得策です。

この放物線の式は

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 4x + 5 \\ &= 2(x-1)^2 + 3 \end{aligned}$$

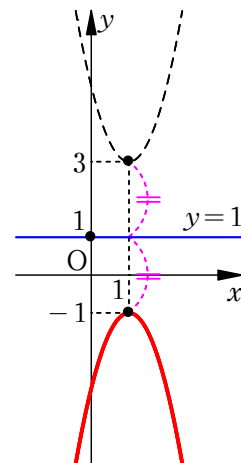
と変形できるので、頂点の座標は $(1, 3)$

で、右の図を見ると、この放物線を直線 $y=1$ に関して対称移動させると、移動後の頂点は $(1, -1)$ となり、さらにグラフは上下が反転します。

よって、求める放物線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -2(x-1)^2 - 1 \\ \therefore y &= -2x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

となります！



ちょっとコメント 平行移動、対称移動の一般的なお話

少し発展的なお話となります。

放物線に限らず、どんなグラフであっても、平行移動・対称移動は x や y を置き換えることによって、移動後のグラフの方程式を求めることができます。

[1] 平行移動

関数 $y=f(x)$ のグラフ F を

x 軸方向に p , y 軸方向に q

だけ平行移動して得られる曲線を G とするとき、 G の方程式は

$$y - q = f(x - p) \quad \leftarrow \text{もとの関数の } x \text{ を } x-p, y \text{ を } y-q \text{ に置き換えよ、という意味。}$$

となります。

[2] 対称移動

関数 $y=f(x)$ のグラフを、 x 軸、 y 軸、原点に関して対称移動して得られる曲線の方程式は、それぞれ

$$x \text{ 軸: } -y = f(x)$$

$$y \text{ 軸: } y = f(-x)$$

$$\text{原点: } -y = f(-x)$$

となります！



今回の山場、最大値・最小値の問題①

📖 数学 I …pp.92-95 4STEP 数学 I + A (数学 I 編) …145~148

2 次関数の単元におけるメインディッシュの 1 つは、最大値・最小値の問題です。今回から 3 回に分けてみなさんにオミマイします。

1 定義域なしの自由奔放な人々

まずは小手調べです。

例題 1 定義域がない場合の最大・最小問題

★★★★☆

次のそれぞれの 2 次関数の最大値または最小値と、そのときの x の値を求めよ。

(1) $y = 2x^2 - 12x + 16$

(2) $y = -x^2 + 4x + 2$

? ナイスな思考プロセス

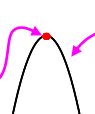
(1)の場合、グラフは  の形です。
 $a > 0$ だから下に凸です!

で、頂点のところで y の値がいちばん小さくなります。だから、このときの y の値を **最小値** といいます。つまり、

頂点の y 座標を求めれば終わり

← またもや平方完成の登場!

っつーことです。

(2)の場合、グラフは  の形になります。
 $a < 0$ だから上に凸です!

頂点のところで y の値がいちばん大きくなるので、このときの y の値を最大値といいます。ということで

コイツも頂点の y 座標を求めれば終わり

です。

III 答案

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= 2x^2 - 12x + 16 \\ &= 2(x^2 - 6x) + 16 \\ &= 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + 16 \\ &= 2(x - 3)^2 - 2 \end{aligned}$$

頂点の座標は $(3, -2)$ となる。

← $a > 0$ で下に凸だから、頂点で最小値をとります!

よって、 **$x = 3$ のとき最小値 -2** (最大値はない) **答**

$$\begin{aligned} (2) \quad y &= -x^2 + 4x + 2 \\ &= -(x^2 - 4x) + 2 \\ &= -(x^2 - 4x + 4 - 4) + 2 \\ &= -(x - 2)^2 + 6 \end{aligned}$$

頂点の座標は $(2, 6)$ となる。

← $a < 0$ で上に凸だから、頂点で最大値をとります!

よって、 **$x = 2$ のとき最大値 6** (最小値はない) **答**

このように、2 次関数の最大値・最小値の問題には、必ずといっていいほど頂点が絡んできます。つまり、ここでも平方完成が出てくるわけです。まだマスターしていないのならば、必ず習得すること!!

2 定義域に束縛される人々

ちょっとレベルアップします。

例題 2 定義域によって制限される場合の最大・最小問題

★★★★☆

- (1) 2 次関数 $y=x^2-4x+5$ ($-1 \leq x \leq 3$) の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めよ。
 (2) 2 次関数 $y=-2x^2+4x+1$ ($-2 < x \leq 2$) の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めよ。

? ナイスな 思考プロセス

例題 1 との決定的な違いは, 見ての通り **定義域** の制限です。ということで, その定義域が示す区間だけのグラフを考えれば OK です。

ただ, (2) の定義域に現れる不等号「 $<$ 」には要注意です。とりあえず答案へとまいりましょう。

III 答案

(1) $y=x^2-4x+5$

$$=(x^2-4x+4-4)+5$$

$$=(x-2)^2+1$$

よって, 頂点の座標は $(2, 1)$ ← とにかく頂点を求める! これ大事。

$$x=-1 \text{ のとき } y=(-1)^2-4 \times (-1)+5=10$$

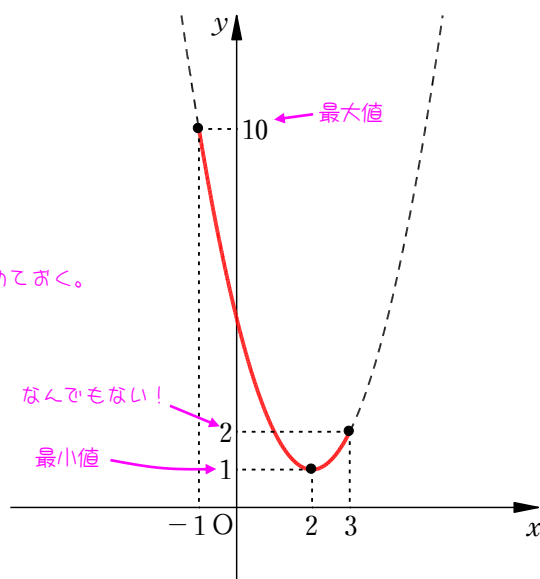
$$x=3 \text{ のとき } y=3^2-4 \times 3+5=2$$

$-1 \leq x \leq 3$ の範囲でグラフをかくと, 右の図のようになる。

グラフより

$x=-1$ のとき, 最大値 10

$x=2$ のとき, 最小値 1 **答**



(2) $y=-2x^2+4x+1$

$$=-2(x^2-2x)+1$$

$$=-2(x^2-2x+1-1)+1$$

$$=-2(x-1)^2+3$$

頂点の座標は $(1, 3)$

$$x=-2 \text{ のとき } y=-2 \times (-2)^2+4 \times (-2)+1=-15$$

$$x=2 \text{ のとき } y=-2 \times 2^2+4 \times 2+1=1$$

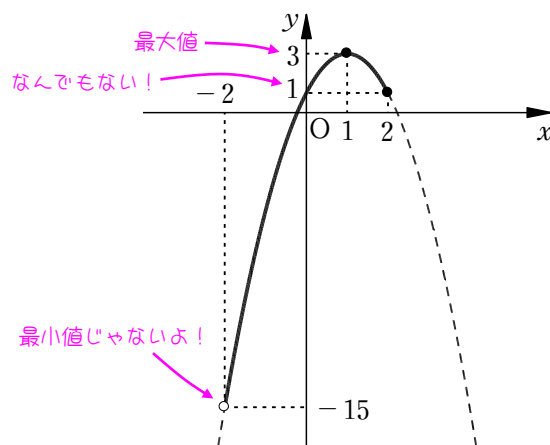
$-2 < x \leq 2$ の範囲でグラフをかくと, 右の図のようになる。

グラフより

$x=1$ のとき, 最大値 3

最小値 **なし** **答**

← -15 じゃないからね!
理由がよくわからん人は p.26 「ちょっとコメント」をご覧ください。



3 ちょっとした問題たち

最後にこんな問題を考えてみましょう。

例題 3 最大・最小からの係数決定

★★★★☆

- (1) 2次関数 $y=2x^2-4x+k$ ($-1 \leq x \leq 2$) の最大値が10 のとき、定数 k の値を求めよ。
 (2) 2次関数 $f(x)=ax^2-2ax+b$ の $-1 \leq x \leq 2$ における最大値が5, 最小値が1 となるときの、定数 a, b の値を求めよ。

? ナイスな 思考プロセス

- (1) 定義域つきの問題は、いかに見やすい図をかくかがポイントです。

$$y=2x^2-4x+k$$

$$=2(x^2-2x)+k$$

$$=2(x^2-2x+1-1)+k$$

$$=2(x-1)^2+k-2$$

k を含んだまま平方完成して、頂点の座標を求めています。文字を含んでいても、やり方はいつも同じです。

頂点の座標は $(1, k-2)$

このとき、定義域が $-1 \leq x \leq 2$ となっているので、この範囲でグラフをイメージすれば OK です。

が！

あくまでも未知数 k を求めることが目的なので、その目的を果たすに足りる簡単な図をかけば十分ですヨ。

右の図から、 $x=-1$ のとき、最大値

$$y=2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + k = 2 + 4 + k = 6 + k$$

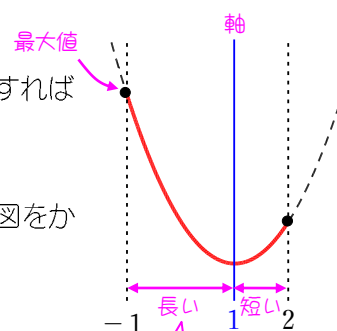
をとることがわかります。

んで、問題文の条件から、 $k+6$ が10 に一致するワケだから…

$$k+6=10$$

$$\therefore k=4$$

とわかりました。めでたし、めでたし。



2次関数は、軸に関して左右対称！
 この性質を生かして、上のような
 実に簡単な図をかけば OK！
 別に y 軸の交点の情報とか使わ
 ない…。
 で、軸から最も遠い場所つまり
 $x=-1$ で最大値となる！

- (2) 問題はこっちです。

何が問題かというと…

x^2 の係数に文字 a が含まれていること

です。だって、 $a>0$ なのか $a<0$ なのかによって、グラフが下に凸なのか上に凸なのが変わるから、最大値・最小値が逆転することが起きてしまうんです。

つまり、 a の正負で場合分けする必要が生じます。

が、何はともあれ平方完成はしておきましょう。

$$f(x)=ax^2-2ax+b$$

$$=a(x^2-2x)+b$$

$$=a(x^2-2x+1-1)+b$$

$$=a\{(x-1)^2-1\}+b$$

$$=a(x-1)^2-a+b$$

ここでは、 $a>0$ の場合のみ考えてみましょう。

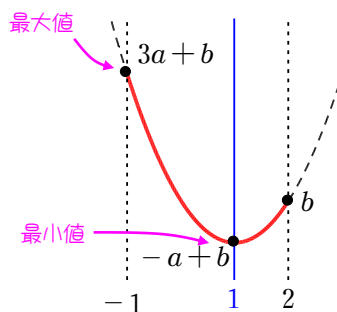
この場合、グラフは下に凸の放物線ですから、右の図のようなイメージになります。

つまり、 $f(x)$ は $x=-1$ で最大、 $x=1$ で最小となります。

$$\text{よって } f(-1)=3a+b=5$$

$$f(1)=-a+b=1$$

あとは、この連立方程式を解いて $a=1, b=2$ (あとは、 $a>0$ となっているかの確認も忘れずに！)



答案

(1) $y = 2x^2 - 4x + k$

$$= 2(x-1)^2 + k - 2$$

頂点の座標は $(1, k-2)$

軸は直線 $x=1$ となる!

定義域 $-1 \leq x \leq 2$ でグラフを考えると、右の図のようになる。

よって、 $x = -1$ のとき、最大値

軸から遠い方がグラフが高くなる!!

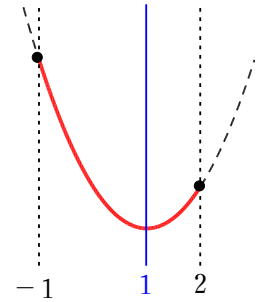
$$y = 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + k$$

$$= k + 6$$

をとる。

条件により、 $k + 6 = 10$

$$\therefore k = 4 \quad \text{答}$$



(2)[1] $a > 0$ のとき ← 下に凸の場合

$$f(x) = a(x-1)^2 - a + b$$

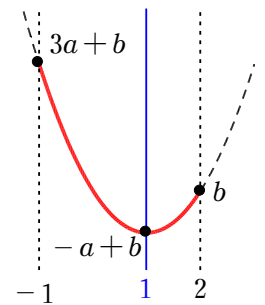
$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから、 $f(x)$ は $x = -1$ で最大、 $x = 1$ で最小となる。

よって $f(-1) = 3a + b = 5$

$$f(1) = -a + b = 1$$

ゆえに $a = 1, b = 2$

これは $a > 0$ を満たすから適する。



[2] $a < 0$ のとき ← 上に凸の場合

$y = f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから、 $f(x)$ は $x = 1$ で最大、 $x = -1$ で最小となる。

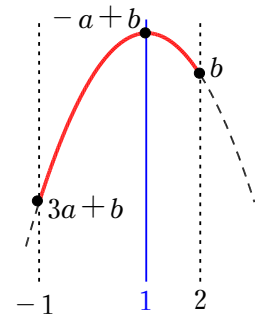
よって $f(1) = -a + b = 5$

$$f(-1) = 3a + b = 1$$

ゆえに $a = -1, b = 4$

これは $a < 0$ を満たすから適する。

この確認を忘れずに!



[1], [2]より、 a, b の値は $(a, b) = (1, 2), (-1, 4) \quad \text{答}$



今回の山場、最大値・最小値の問題②

📖 数学 I …pp.96-97 4STEP 数学 I + A (数学 I 編) …149~157

2 次関数の式の中に文字が登場すると、途端に難易度がアップします。今、巷で大人気の「場合分け」の考え方が出現するのです！

1 定義域の右端が伸び縮みするパターン

手始めに、定義域に文字が含まれるパターンからいきましょう。

例題 1 2 次関数の最大・最小(1)…区間に定数を含む

★★★★☆

$a > 0$ とする。2 次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ($0 \leq x \leq a$) について

(1) $f(x)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の最大値 $M(a)$ を求めよ。

? ナイスな 思考プロセス

最大・最小問題の初手はとにかく平方完成です。

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^2 - 4 + 5 \\ &= (x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

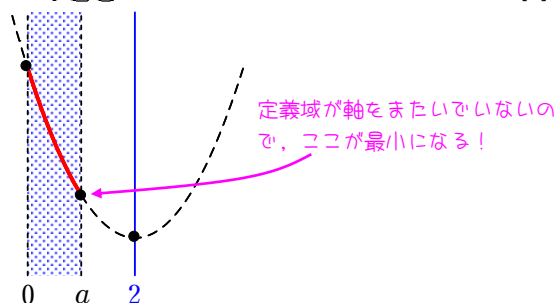
つつうことで、軸が直線 $x=2$ ，下に凸の放物線となります。

さて、定義域をご覧ください。

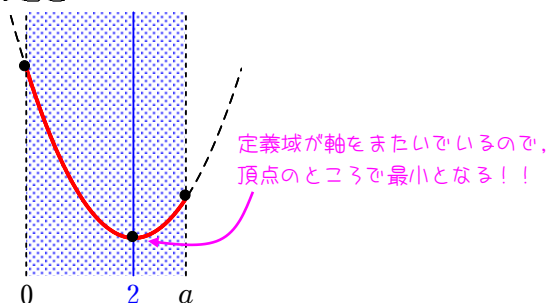
定義域の左端は 0 なのですが、右端は a となっていて具体的にはわかりません。ってことは、 a の値によって、**定義域の右端が動き、定義域が伸び縮みする**んです！！

(1) 最小値は、定義域が軸をまたぐのかどうか問題となります！

[1] $0 < a < 2$ のとき

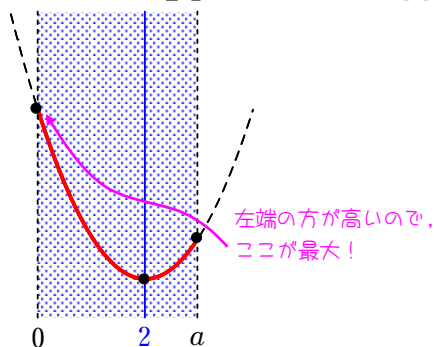


[2] $2 \leq a$ のとき

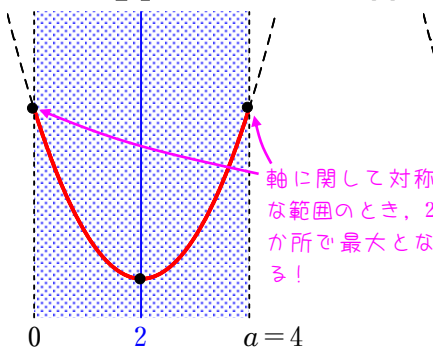


(2) 最大値を考えると、2 か所で最大値となるところがあることに注意！

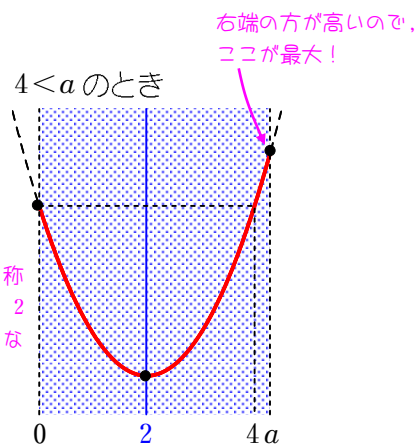
[1] $0 < a < 4$ のとき



[2] $a = 4$ のとき



[3] $4 < a$ のとき



では、これらを踏まえて答案へとまいります。

答案

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

よって、 $y = f(x)$ のグラフは、軸が直線 $x=2$ 、頂点が点 $(2, 1)$ の下に凸の放物線である。

(1)[1] $0 < a < 2$ のとき $a=2$ は [1], [2] のどちらに含めてもよいが、必ずどちらかに含めなければ! (両方含めてもよい)

軸は区間より右にあるから、 $f(x)$ は $x=a$ のとき最小となる。 [1]

よって

$$m(a) = f(a) = a^2 - 4a + 5$$

[2] $2 \leq a$ のとき

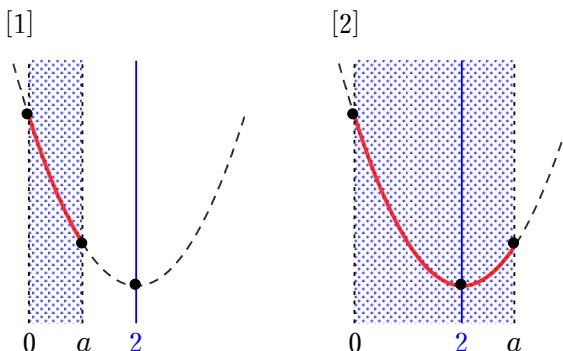
軸は区間内にあるから、 $f(x)$ は $x=2$ のとき最小となる。

よって

$$m(a) = f(2) = 1$$

[1], [2] より

$$m(a) = \begin{cases} a^2 - 4a + 5 & (0 < a < 2 \text{ のとき}) \\ 1 & (2 \leq a \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{答}$$



(2)[1] $0 < a < 4$ のとき

軸は区間の中央より右にあるから、 $f(x)$ は $x=0$ のとき最大となる。

よって

$$M(a) = f(0) = 5$$

[2] $a=4$ のとき

軸は区間の中央にあるから、 $f(x)$ は $x=0, 4$ のとき最大となる。

よって

$$M(a) = f(0) = f(4) = 5$$

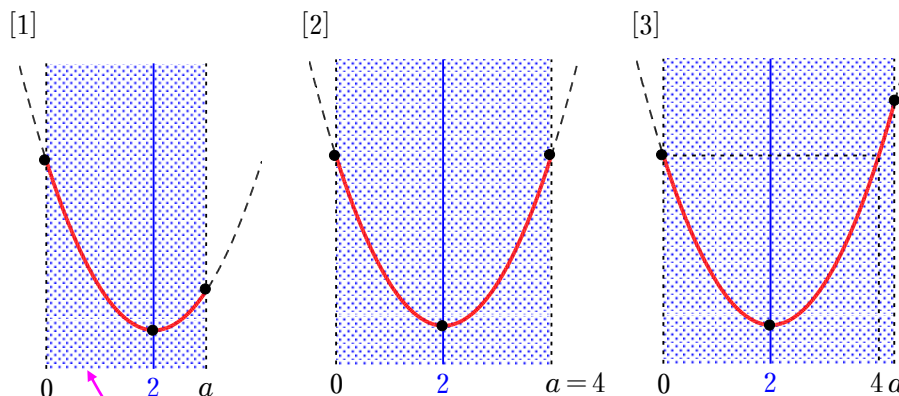
[3] $4 < a$ のとき

軸は区間の中央より左にあるから、 $f(x)$ は $x=a$ のとき最大となる。

$$M(a) = f(a) = a^2 - 4a + 5$$

[1]~[3] より

$$M(a) = \begin{cases} 5 & (0 < a \leq 4 \text{ のとき}) \\ a^2 - 4a + 5 & (4 < a \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{答}$$



軸が区間内になくとも、 $x=0$ で最大となる。

最大値をとる x の値を求めなくてよいから、最大値が等しい [1], [2] をもまとめてみました。

2 軸が動くパターン

軸の位置で場合分けをしなければならない例です。

例題 2 2 次関数の最大・最小(2)…軸に定数を含む

★★★★☆

2 次関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 2$ ($0 \leq x \leq 2$) について

(1) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。 (2) $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

? ナイスな 思考プロセス

最大・最小問題にもだんだん慣れてきましたか?
とにかく最初にすることは平方完成でしたね。

20 ◆ Advanced 代数III

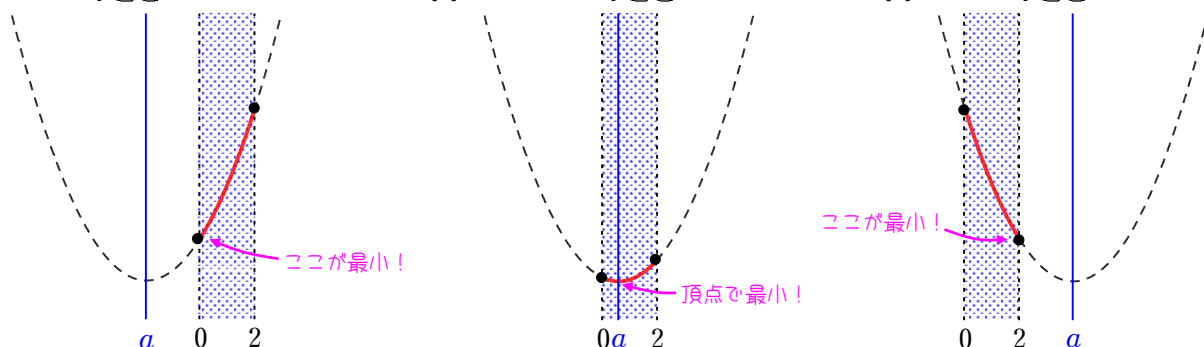
$$f(x) = x^2 - 2ax + 2$$

$$= (x-a)^2 - a^2 + 2$$

つまり、頂点は $(a, 3a^2 - 3a)$ です！

定義域は $0 \leq x \leq 2$ に固定されているのですが、 a の値が決まっていないおかげで、 a の値によって軸の位置が左右に動くという事態になっています。ということで、最小値は……

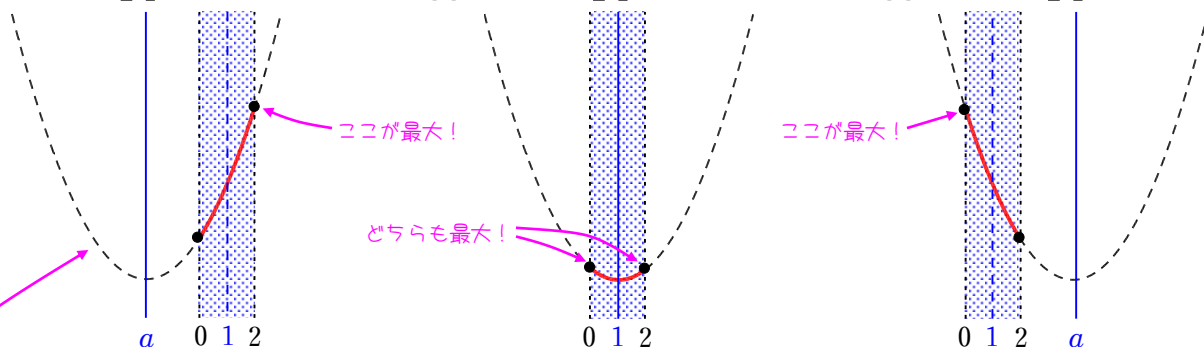
[1] $a < 0$ のとき ← 区間の左に軸がある！ [2] $0 \leq a \leq 2$ のとき ← 区間に軸がある！ [3] $2 < a$ のとき ← 区間の右に軸がある！



で、最大値なんです……

グラフが下に凸の場合、区間の中央と軸がぴったり重なると区間の端点での高さが等しくなってしまいます。というわけで、区間の中央に重なるか、右にずれるか左にずれるかの場合分けが必要です。

[1] $a < 1$ のとき [2] $a = 1$ のとき [3] $1 < a$ のとき



ちょっとコメント 最大値の[1]は、 $a < 0$ じゃダメ？

上の図を見ると確かに $a < 0$ としてもいい気がするのですが、 $0 < a$ であつたとしても、 $x=2$ のところで最大値をとる場合があります。

それが右の図で、区間に軸が食い込んでいても、区間の中央が軸よりちょっとでも右にずれていれば $x=2$ のところで最大値をとるわけです。

ということで、結局のところ、放物線が下に凸の場合の最大値は、区間の中央と軸の位置関係によって場合分けする必要があります。

答案 ← 図は上のものを参照してください。

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2 = (x-a)^2 - a^2 + 2$$

よって、 $y = f(x)$ のグラフは、軸が直線 $x = a$ 、頂点が点 $(a, -a^2 + 2)$ の下に凸の放物線である。

(1)[1] $a < 0$ のとき

軸は区間より左にあるから、 $f(x)$ は

$x=0$ のとき 最小値 2 **答**

[2] $0 \leq a \leq 2$ のとき

軸は区間内にあるから、 $f(x)$ は

$x=a$ のとき 最小値 $-a^2 + 2$ **答**

[3] $2 < a$ のとき

軸は区間より右にあるから、 $f(x)$ は

$x=2$ のとき 最小値 $-4a + 6$ **答**

(2)[1] $a < 1$ のとき

軸は区間の中央より左にあるから

$x=2$ のとき 最大値 $-4a + 6$ **答**

[2] $a = 1$ のとき

軸は区間の中央にあるから、 $f(x)$ は

$x=0, 2$ のとき 最大値 2 **答**

[3] $1 < a$ のとき

軸は区間の中央にあるから、 $f(x)$ は

$x=0$ のとき 最大値 2 **答**

今回の山場、最大値・最小値の問題③

数学 I …pp.98-100 4STEP 数学 I + A (数学 I 編) …158~165

いよいよ山場です。

1 区間の両端が動くパターン

基本的な考え方は前回と同じですよ。

例題 1 2次関数の最大・最小(3)…区間に定数を含む

★★★★☆

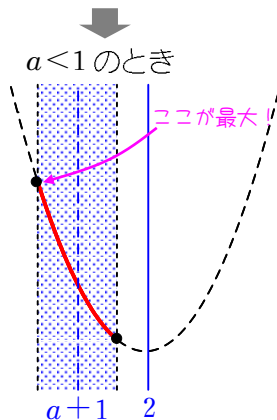
2次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ($a \leq x \leq a+2$) について(1) 最大値 $M(a)$ を求めよ。また、 $y = M(a)$ のグラフをかけ。(2) 最小値 $m(a)$ を求めよ。また、 $y = m(a)$ のグラフをかけ。? ナイスな
思考プロセス

もうわかりだと思いますが、まずは平方完成です。

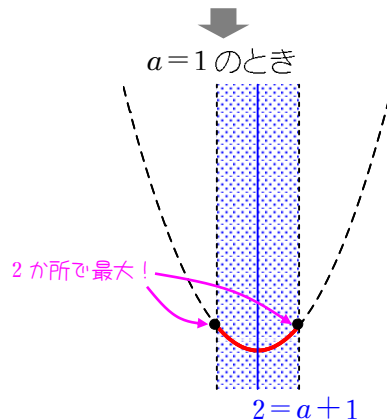
$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

つてことで、軸が直線 $x=2$ の、下に凸の放物線です。本問では、区間が $a \leq x \leq a+2$ のように左端にも右端にも文字 a が含まれていて、区間全体が動くのですが、幅 2 の区間があちこちに移動するイメージとなります。

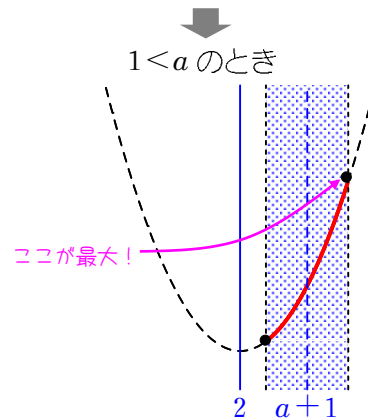
(a+2)-a=2 であふ。

(1) 最大値は、 $f(x)$ が下に凸ですので、区間の中央 $x=a+1$ と軸との位置関係で場合分けです。[1] $a+1 < 2$ のとき[2] $a+1 = 2$ のとき[3] $2 < a+1$ のとき $x=a$ で最大

$$M(a) = f(a) = a^2 - 4a + 5$$

 $x=1, 3$ で最大

$$M(a) = f(1) = f(3) = 2$$

 $x=a+1$ で最大

$$M(a) = f(a+2) = a^2 + 1$$

答えでちゃんと計算します。

以上をまとめると……

$$M(a) = \begin{cases} a^2 - 4a + 5 & (a < 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (a = 1 \text{ のとき}) \\ a^2 + 1 & (1 < a \text{ のとき}) \end{cases}$$

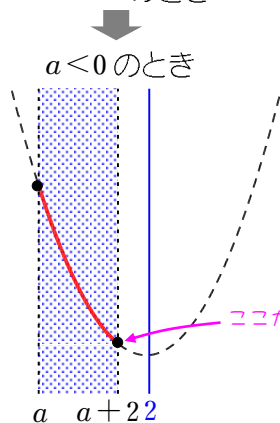
となるわけですが、「 $y = M(a)$ のグラフをかけ」とは、横軸を a 軸、縦軸を y 軸として $a=1$ を境に 3 種類のグラフをかけ、という意味です。

答案で実際にかいてみます。

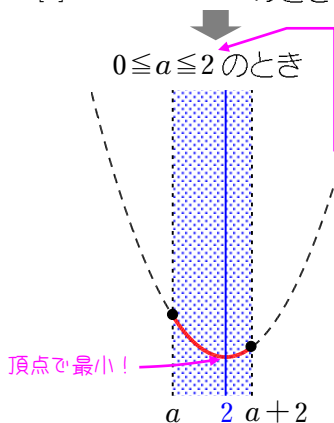
22 ◆ Advanced 代数III

(2) 最小値は、軸が区間の右にあるか、区間内にあるか、区間の左にあるかで場合分けですね。

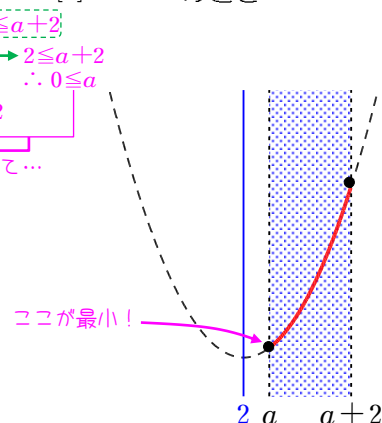
[1] $a+2 < 2$ のとき



[2] $a \leq 2 \leq a+2$ のとき



[3] $2 < a$ のとき



$y=m(a)$ のグラフのかき方は(1)と同じです。

では、答案へとまいりましょう!!

III 答案

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

よって、 $y=f(x)$ のグラフは、軸が直線 $x=2$ 、頂点が点 $(2, 1)$ の下に凸の放物線である。

(1)[1] $a+1 < 2$ すなわち $a < 1$ のとき

軸は区間の中央より右にあるから、 $f(x)$ は $x=a$ のとき最大となる。

よって

$$\begin{aligned} M(a) &= f(a) \\ &= a^2 - 4a + 5 \\ &= (a-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

[2] $a+1 = 2$ すなわち $a = 1$ のとき

軸は区間の中央にあるから、 $f(x)$ は $x=1, 3$ のとき最大となる。

よって

$$M(a) = f(1) = f(3) = 2$$

[3] $2 < a+1$ すなわち $1 < a$ のとき

軸は区間の中央より左にあるから、 $f(x)$ は $x=a+2$ のとき最大となる。

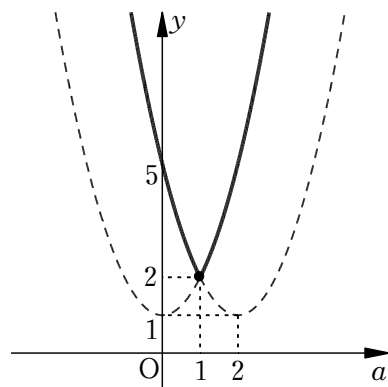
よって

$$\begin{aligned} M(a) &= f(a+2) \\ &= \{(a+2)-2\}^2 + 1 \quad \leftarrow f(x) = (x-2)^2 + 1 \text{ に代入した方が計算しやすい。} \\ &= a^2 + 1 \end{aligned}$$

[1]~[3]より

$$M(a) = \begin{cases} (a-2)^2 + 1 & (a < 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (a = 1 \text{ のとき}) \\ a^2 + 1 & (1 < a \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{答}$$

したがって、 $y=M(a)$ のグラフは右の図の実線部分。 答



(2)[1] $a+2 < 2$ すなわち $a < 0$ のとき

軸は区間より右にあるから、 $f(x)$ は $x=a+2$ のとき最小となる。

よって

$$m(a) = f(a+2) = a^2 + 1$$

[2] $a \leq 2 \leq a+2$ すなわち $0 \leq a \leq 2$ のとき

軸は区間内にあるから、 $f(x)$ は $x=2$ のとき最小となる。

よって

$$m(a) = f(2) = 1$$

[3] $2 < a$ のとき

軸は区間より左にあるから、 $f(x)$ は $x=a$ のとき最小となる。

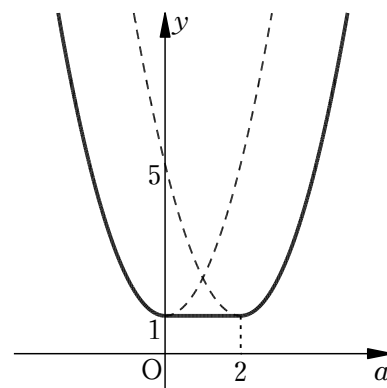
よって

$$\begin{aligned} m(a) &= f(a) = a^2 - 4a + 5 \\ &= (a-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

[1]~[3]より

$$m(a) = \begin{cases} a^2 + 1 & (a < 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (0 \leq a \leq 2 \text{ のとき}) \\ (a-2)^2 + 1 & (2 < a \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{答}$$

したがって、 $y=m(a)$ のグラフは右の図の実線部分。 答



2 文章題も一応やっておこうかな～

あまり重要ではありませんが、一応 2 次関数の最大・最小問題に絡んだ文章題も紹介しておきます。でも、授業では扱いません。

例題 2 2 次関数の最大・最小の文章題への応用

★★★★☆

仕入れ値が 1 kg あたり 1500 円の食料品を、1 kg あたり 2000 円で売ると、1 日あたり 800 kg 売れるが、
 売値を 1 kg あたり 10 円値下げまたは値上げすることにより、売上量が 20 kg ずつ増加または減少するという。
 1 日あたりの利益を最大にするためには、1 kg あたりの売値をいくらにすればよいか。また、そのときの 1 日あたりの売上量はいくらか。

? ナイスな 思考プロセス

—— 線部の条件をどう表現するか、が初手です。

1 kg あたりの売値を $10x$ 円値下げ（値上げ）すると、売上量は $20x$ kg 増加（減少）する、とでもしておきましょう。利益は

$$(\text{利益}) = (\text{売上金額}) - (\text{仕入れ値})$$

で計算されるので、1 日あたりの売上金額と仕入れ値を計算しておく必要があります。

10x 円値下げした場合、

$$1 \text{ kg あたりの売値} \longrightarrow (2000 - 10x) \text{ 円}$$

$$\text{売上量} \longrightarrow (800 + 20x) \text{ kg}$$

$$\text{仕入れ値} \longrightarrow 1500(800 + 20x) \text{ 円}$$

ってなわけで、1 日あたりの利益 y は

$$y = (2000 - 10x)(800 + 20x) - 1500(800 + 20x)$$

となります。

あとはこの 2 次関数の最大値を考えればいいのですが……

隠れた条件にご注意！！

売値も売上量も 0 以上じゃないとダメ！

← 値段の話をしているので、負の数になることはありません。

というわけで

24 ◆ Advanced 代数III

$$2000 - 10x \geq 0 \quad \text{かつ} \quad 800 + 20x \geq 0$$

が条件となります。

それらを踏まえて答案をご覧ください。

III 答案

1 kg あたりの売値を $10x$ 円値下げして、 $(2000 - 10x)$ 円とすると、1 日あたりの売上量は $(800 + 20x)$ kg となる。
ただし、 $x < 0$ のときは値上げを示す。

$2000 - 10x \geq 0$ かつ $800 + 20x \geq 0$ であるから

$$-40 \leq x \leq 200 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

1 日あたりの売上金額は $(2000 - 10x)(800 + 20x)$ 円

1 日あたりの仕入れ金額は $1500(800 + 20x)$ 円

1 日あたりの利益を y 円とすると

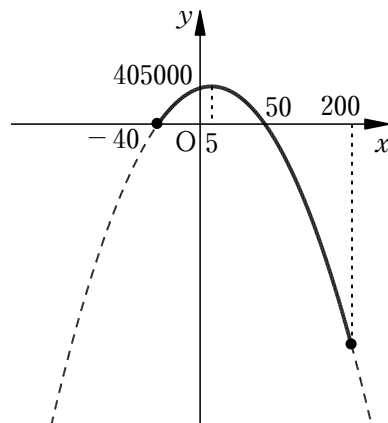
$$\begin{aligned} y &= (2000 - 10x)(800 + 20x) - 1500(800 + 20x) \\ &= -200x^2 + 2000x + 400000 \\ &= -200(x - 5)^2 + 405000 \end{aligned}$$

①の範囲における y のグラフは、右の図の実線部分である。

よって、グラフより、 y は $x = 5$ のとき最大値をとる。

したがって、利益が最大になるのは 50 円値下げするときで 1 kg あたりの売値は 1950 円、1 日あたりの売上量は 900 kg

答



3 最大・最小問題の亜種

応用をおひとつ。これができればなかなかなもんです。

例題 3 置き換えを利用する関数の最大・最小

★★★★☆

関数 $y = (x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) - 1$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

? ナイスな 思考プロセス

間違っても展開しちゃダメですヨ！！

だって、4 次関数になってしまいますから。その時点で頭が真っ白になります。

ここは式をよ〜く見て、 $x^2 - 2x$ という共通部分があることに気づいてホシイのです！！

というわけで、

$$x^2 - 2x = t \quad \cdots \cdots (*)$$

とでもおいて、与式を

$$y = t^2 + 4t - 1$$

とすると、 t の 2 次関数の最大・最小問題に帰着します！

な〜んだ、簡単！ じゃあ平方完成して、頂点で最小値つつうことで終わりじゃん！！

と思ったそこのあなた。綿あめより甘い。

t の範囲ってないの？って思いませんか？

実はあるんです。(*)式を変形してみましょう。

$$\begin{aligned} t &= x^2 - 2x \\ &= (x - 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

これはつまり、 t の 2 次関数として見たとき、 $x = 1$ で t は最小値 -1 をとる、ってことを意味します。

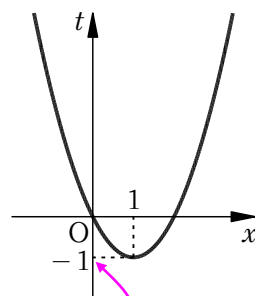
言い換えれば、 $t \geq -1$ ってことですね。

というわけで、本問は「 $t \geq -1$ の範囲で、 $y = t^2 + 4t - 1$ の最小値を求めよ」という問題に読み替えられます。

続きは答案にて。

まあ、本問はあらかじめ書いてあるので、気づかない人も少ないでしょう。

え！？ これで終わり？



ここが最小値！

III 答案

$t = x^2 - 2x$ とおくと

$$t = (x-1)^2 - 1$$

右の図により $t \geq -1$

このとき、与えられた関数は

$$y = (x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) - 1$$

$$= t^2 + 4t - 1$$

$$= (t+2)^2 - 5$$

$t \geq -1$ において、 $y = (t+2)^2 - 5$ のグラフは右の図のようになる。

よって、 y は

$$t = -1 \text{ のとき 最小値 } -4$$

このとき、 $x^2 - 2x = -1$ より

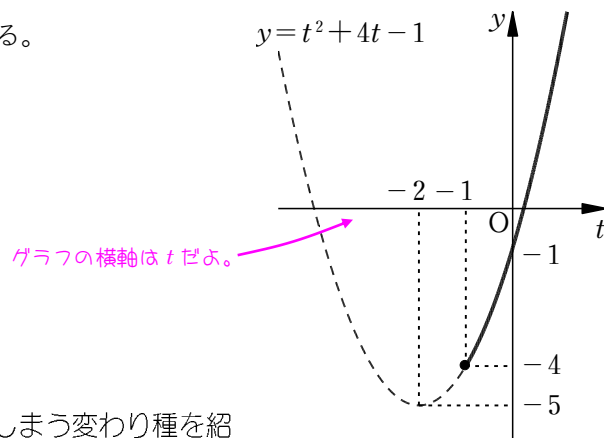
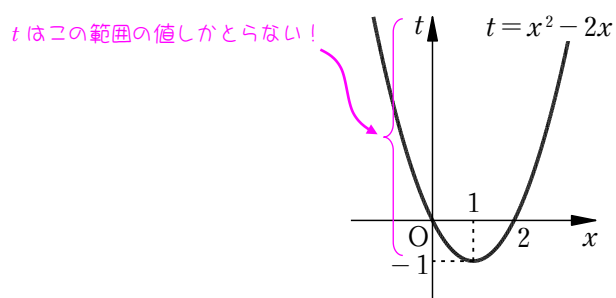
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \text{ より } x = 1$$

したがって、 y は

$$x = 1 \text{ のとき 最小値 } -4 \quad \boxed{\text{答}}$$

では、最大・最小問題の最後に、結局 2 次関数の話になってしまう変わり種を紹介しておきます。



例題 4 2変数関数の最大・最小

★★★★☆

- (1) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y = 1$ のとき、 $2x^2 + y^2$ の最大値、最小値とそのときの x , y の値を求めよ。
- (2) x , y が実数の値をとりながら変化するとき、 $P = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 10y + 1$ の最小値、およびそのときの x , y の値を求めよ。

? ナイスな思考プロセス

どちらも x , y の 2 変数を含む関数の最大・最小問題なのですが……

決定的な違いがあります。

(1) 条件 $x + y = 1$ から $2x^2 + y^2$ の変数の種類を減らすことができる！

(2) 条件がないので、変数を減らせない！！

ってことです。

$$(1) \ x + y = 1 \longrightarrow y = 1 - x$$

$2x^2 + y^2$ に代入すると

$$2x^2 + y^2 = 2x^2 + (1 - x)^2 \quad \leftarrow \text{条件から1文字消去すると……}$$

$$= 2x^2 + x^2 - 2x + 1$$

$$= 3x^2 - 2x + 1 \quad \leftarrow x \text{ の 2 次関数となった！}$$

となるので、この 2 次関数の最大・最小を考えることになります。

ただし！！

条件 $y \geq 0$ から……

$$y = 1 - x \geq 0 \longrightarrow x \leq 1$$

これと条件 $x \geq 0$ を合わせて

$$0 \leq x \leq 1$$

の範囲で考えなければならないことに注意！！

(2) (1)と違って、1文字消去ができません!!

そこで、いったん y をただの数として扱ってみましょう。

$$\begin{aligned} P &= x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 10y + 1 \\ &= x^2 - \underbrace{2(y+1)}_{x\text{の係数}}x + \underbrace{3y^2 + 10y + 1}_{\text{定数項}} \end{aligned}$$

とすると、 x の2次関数としてみることができます。

そこで、 y を数扱いしつつ、 x の2次式を平方完成してみましょう。

$$P = \{x - (y+1)\}^2 - (y+1)^2 + 3y^2 + 10y + 1$$

で、——線部をさらに y の2次式とみて平方完成すると、最小値が見えてきます。

あとは答案にて。

III 答案

(1) $x+y=1$ より $y=1-x$ ……①

$x \geq 0$, $y=1-x \geq 0$ であるから

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{……②} \quad \leftarrow y \text{を消去するから、} y \text{の範囲 } y \geq 0 \text{を} x \text{の範囲に直します。}$$

①を $2x^2+y^2$ に代入すると

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 &= 2x^2 + (1-x)^2 \\ &= 3x^2 - 2x + 1 \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

②の範囲において、 $2x^2+y^2$ は

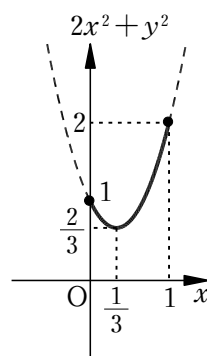
$$x=1 \text{ のとき最大値 } 2, \quad x=\frac{1}{3} \text{ のとき最小値 } \frac{2}{3}$$

①より

$$x=1 \text{ のとき } y=0, \quad x=\frac{1}{3} \text{ のとき } y=\frac{2}{3}$$

よって、 $2x^2+y^2$ は

$$\begin{aligned} x=1, y=0 \text{ のとき} & \quad \text{最大値 } 2 \\ x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3} \text{ のとき} & \quad \text{最小値 } \frac{2}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$



(2) P を x について整理すると

$$\begin{aligned} P &= x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 10y + 1 \\ &= x^2 - 2(y+1)x + 3y^2 + 10y + 1 \\ &= \{x - (y+1)\}^2 - (y+1)^2 + 3y^2 + 10y + 1 \\ &= (x-y-1)^2 + 2y^2 + 8y \\ &= (x-y-1)^2 + 2(y+2)^2 - 8 \quad \leftarrow x \text{について平方完成して、} y \text{について平方完成する。} \end{aligned}$$

x, y は実数であるから

$$(x-y-1)^2 \geq 0, \quad 2(y+2)^2 \geq 0 \quad \leftarrow (\text{実数})^2 \geq 0 \text{は常に成り立ちます。}$$

等号が成り立つのは $x-y-1=0$ かつ $y+2=0$

これを解いて $x=-1, y=-2$

したがって

$$x=-1, y=-2 \text{ のとき} \quad \text{最小値 } -8 \quad \text{答}$$

11

第3章 2次関数

2次関数の正体を暴け！

📖 数学 I …pp.101-103 4STEP 数学 I + A (数学 I 編) …166~174

与えられた条件をもとに、2次関数の式をつくってみようという話です。「2次関数の決定問題」といいます。

1 3種の神器を使いこなせ！

まずは基本編からいきましょう。

例題 1 2次関数の決定問題(1)

★★★★☆

グラフが次の条件を満たすような2次関数を求めよ。

- (1) 頂点が点 (1, 3) で、点 (2, 5) を通る。
- (2) 3点 (1, 6), (-2, -9), (4, 3) を通る。
- (3) 3点 (-1, 0), (5, 0), (0, 5) を通る。

? ナイスな 思考プロセス

2次関数の決定問題とは、こんな感じの問題です。この手の問題は、初手が肝心です。

- (1) 頂点や軸に絡んだ情報があるときは

$$y = a(x - p)^2 + q \quad \leftarrow \text{頂点が } (p, q) \text{ のときの式です。標準形といました。}$$

の形からスタート！！

頂点が (1, 3) なので、 $p=1$, $q=3$ ですね？

ってなわけで、求める放物線の方程式は

$$y = a(x - 1)^2 + 3$$

とおけます。あとは未知数 a を求めるために、もうひとつの情報「点 (2, 5) を通る」が使えます。

そう！ 代入ですね。

- (2) 3点の座標がわかっているときは

$$y = ax^2 + bx + c \quad \leftarrow \text{一般形としました。}$$

の形からスタート！！

この式に3点の座標を突っ込めばOKです。

$$\text{点 (1, 6) を通る} \longrightarrow a + b + c = 6$$

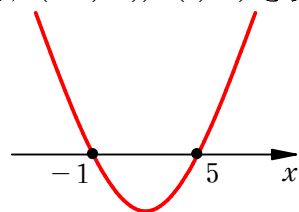
$$\text{点 (-2, -9) を通る} \longrightarrow 4a - 2b + c = -9$$

$$\text{点 (4, 3) を通る} \longrightarrow 16a + 4b + c = 3$$

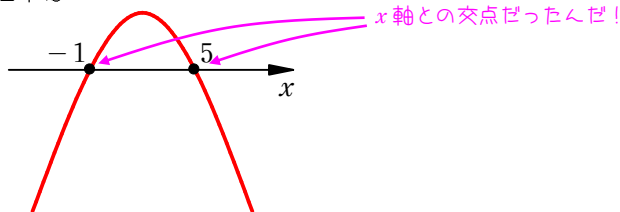
あとはこの連立3元1次方程式を解けばOKです。← 計算はなかなか面倒なのですが。

- (3) これも3点の座標がわかっているので、(2)と同じ方針でいいのか……と思いますが、実はもう少し簡単な解法があります。実はこの3点のなかに、ものすごい情報を持っているヤツらがいるのです！

それは、(-1, 0), (5, 0) です！ この連中は…



または



であることを示しています。つまり、求める放物線の方程式は

$$y = a(x + 1)(x - 5)$$

とおくことができます！

理由は簡単！ このような形になっていれば、 $y=0$ とすると

$$0 = a(x + 1)(x - 5)$$

28 ◆ Advanced 代数III

となり、もちろん $a \neq 0$ ですから ← もし $a=0$ だとすると、そもそも放物線にはなりませんよね？

$$(x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x = -1, 5$$

つまり、 x 軸との交点は $(-1, 0)$, $(5, 0)$ となって辻褄が合います。

あとは、 a を求めるために、もう1点の情報 $(4, -6)$ を活用すればOKです！！

■ 答案

- (1) 頂点が点 $(1, 3)$ であるから、求める2次関数は

$$y = a(x-1)^2 + 3 \quad \leftarrow \text{頂点の情報があるのでスタートは標準形です。}$$

と表される。

この関数のグラフが点 $(2, 5)$ を通るから

$$5 = a(2-1)^2 + 3$$

これを解くと $a = 2$

よって、求める2次関数は

$$y = 2(x-1)^2 + 3 \quad \text{答} \quad \leftarrow \text{展開して } y = 2x^2 - 4x + 5 \text{ と答えてもいいのですが、展開ミスのリスクを負うくらいならそのまま答えた方がいいでしょう。}$$

- (2) 求める2次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおく。

この関数のグラフが

$$\text{点 } (1, 6) \text{ を通るから} \quad 6 = a + b + c \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$\text{点 } (-2, -9) \text{ を通るから} \quad -9 = 4a - 2b + c \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{点 } (4, 3) \text{ を通るから} \quad 3 = 16a + 4b + c \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{③} - \text{①} \text{ より} \quad -3 = 15a + 3b$$

$$\text{すなわち} \quad 5a + b = -1 \quad \cdots \cdots \text{④}$$

$$\text{また、③} - \text{②} \text{ より} \quad 12 = 12a + 6b$$

$$\text{すなわち} \quad 2a + b = 2 \quad \cdots \cdots \text{⑤}$$

$$\text{④, ⑤を解くと} \quad a = -1, b = 4$$

$$\text{①に代入すると} \quad c = 3$$

よって、求める2次関数は

$$y = -x^2 + 4x + 3 \quad \text{答}$$

- (3) グラフが x 軸と2点 $(-1, 0)$, $(5, 0)$ で交わるから、求める2次関数は

$$y = a(x+1)(x-5)$$

と表される。

この関数のグラフが y 軸と点 $(0, 5)$ で交わるから

$$5 = a(0+1)(0-5)$$

これを解くと $a = -1$

よって、求める2次関数は

$$y = -(x+1)(x-5) \quad \text{答} \quad \leftarrow \text{これも } y = -x^2 + 4x + 5 \text{ としてもいいのですが、そのままでもかまいません。}$$

■ 別解

- (3) グラフが y 軸と点 $(0, 5)$ で交わるから、求める2次関数は

$$y = ax^2 + bx + 5 \quad \leftarrow y \text{ 軸上の点がかがっている場合は、こんな解法もありです。}$$

と表される。これが点 $(-1, 0)$, $(5, 0)$ を通るから

$$a - b + 5 = 0, \quad 25a + 5b + 5 = 0$$

これを解いて $a = -1, b = 4$

よって、求める2次関数は $y = -x^2 + 4x + 5$ **答**

解法をまとめておきます。

2 次関数の決定問題

2 次関数の決定問題では……

解法
イチ

頂点や軸に関する情報があるとき

標準形 $y=a(x-p)^2+q$ の式からスタート！

解法
ニツ

通る 3 点の情報がわかっているとき

一般形 $y=ax^2+bx+c$ の式からスタート！

解法
サン

x 軸との交点が 2 つともわかっているとき 1 つしかわかっていないときは、解法 2 の方がいいです。

因数分解形 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ の式からスタート！

2 類似品

では、いくつか変化球を考えましょうか。

例題 2 2 次関数の決定問題(2)

★★★★☆

次の条件を満たすような 2 次関数を求めよ。

- (1) 頂点が x 軸上にあり、2 点 $(4, 4)$, $(0, 36)$ を通る。
- (2) $y=2x^2$ のグラフを平行移動したもので、点 $(2, 3)$ を通り、頂点が直線 $y=2x-1$ 上にある。
- (3) $x=2$ のとき最大値 3 をとり、そのグラフが点 $(1, 2)$ を通る。

? ナイスな 思考プロセス

- (1) 頂点が x 軸上にある $\longrightarrow$ 頂点は点 $(p, 0)$ とおける！！

ということで、頂点の情報がありませんから、

$$y=a(x-p)^2 \leftarrow y=a(x-p)^2+0 \text{ であらう。念のため。}$$

と標準形を活用します！

- (2) 頂点が直線 $y=2x-1$ 上にある $\longrightarrow$ 頂点は点 $(p, 2p-1)$ とおける！！

で、さらに

$$y=2x^2 \text{ のグラフを平行移動したもので } \longrightarrow a=2 \text{ である！！}$$

放物線の式で a はグラフの形を制御する定数なので、平行移動するときで変わりません。

つまり……

$$y=2(x-p)^2+2p-1 \leftarrow \text{これも標準形であらう。}$$

と表せる！！

- (3) 定義域がすべての実数である以上、頂点のところで最小または最大となりますから……

$$x=2 \text{ のとき最大値 } 3 \longrightarrow \text{頂点が点 } (2, 3) \text{ \& グラフは上に凸}$$

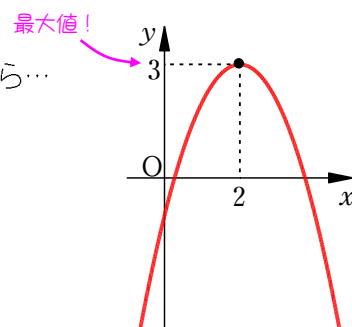
と言い換えられます。

結局頂点の情報が与えられているので

$$y=a(x-2)^2+3$$

とおけます。

では、これらを踏まえて答案へ。



答案

(1) 頂点が x 軸上にあるから、求める 2 次関数は

$$y = a(x - p)^2$$

と表される。ただし、 $a \neq 0$ とする。

点 (4, 4) を通るから $4 = a(4 - p)^2$ ……①

点 (0, 36) を通るから $36 = ap^2$ ……②

② - ① $\times 9$ より $0 = ap^2 - 9a(4 - p)^2$ ← 定数の部分を消去するという荒業です。

$a \neq 0$ より $0 = p^2 - 9(4 - p)^2$

これを解くと $p = 3, 6$

②より、 $p = 3$ のとき $a = 4$

$p = 6$ のとき $a = 1$

よって、求める 2 次関数は

$$y = 4(x - 3)^2, \quad y = (x - 6)^2 \quad \text{答}$$

(2) 頂点が、直線 $y = 2x - 1$ 上にあるから、頂点は点 $(p, 2p - 1)$ とおける。

また、求める 2 次関数は、そのグラフが $y = 2x^2$ を平行移動したものであるから、

$$y = 2(x - p)^2 + 2p - 1 \quad \text{……①}$$

と表される。

点 (2, 3) を通るから $3 = 2(2 - p)^2 + 2p - 1$

整理すると $(p - 1)(p - 2) = 0$

よって $p = 1, 2$

①より、 $p = 1$ のとき $y = 2(x - 1)^2 + 1$

$p = 2$ のとき $y = 2(x - 2)^2 + 3$

したがって、求める 2 次関数は

$$y = 2(x - 1)^2 + 1, \quad y = 2(x - 2)^2 + 3 \quad \text{答}$$

(3) $x = 2$ のとき最大値 3 をとるから、求める 2 次関数は

$$y = a(x - 2)^2 + 3$$

と表される。ただし、 $a < 0$ である。

このグラフが点 (1, 2) を通るから

$$2 = a(1 - 2)^2 + 3$$

$$\therefore a = -1$$

これは $a < 0$ を満たしているから適する。← この確認を忘れずに。

したがって、求める 2 次関数は

$$y = -(x - 2)^2 + 3 \quad \text{答}$$

長い道のりでしたが、2 次関数の前半戦はこれにて終了です！