

1

第1章 場合の数と確率

すでに起こった後の確率

数学A …pp.64~69 4STEP 数学I + A (数学A編) …124~137

ちょっと変わった確率を紹介しましょう。

1 条件付き確率ってなに？

いきなりで恐縮ですが、例題を通じて理解してもらいます。

例題 1 条件付き確率

★★★★☆

ある100人を調査した結果、右のような表が得られた。
この100人の中から無作為に1人を選ぶとき、その人が
男子であるという事象を A 、
メガネをかけているという事象を B
とする。このとき、

	男子	女子	合計
メガネ有	36人	30人	66人
メガネ無	24人	10人	34人
合計	60人	40人	100人

- (1) 事象 A が起こる確率 $P(A)$ を求めよ。
- (2) 事象 B が起こる確率 $P(B)$ を求めよ。
- (3) 事象 $A \cap B$ が起こる確率 $P(A \cap B)$ を求めよ。
- (4) 選ばれた人が男子であるとき、その人がメガネをかけている確率 $P_A(B)$ を求めよ。

? ナイスな思考プロセス

(4)に見慣れない記号 $P_A(B)$ っていうのがありますが……今はとりあえず放っておきましょう。

(1)~(3)は簡単です。表を見れば一発ですから。

男子は100人中60人だから

$$\text{事象 } A \text{ が起こる確率 } P(A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \dots\dots(1)$$

メガネをかけている人は100人中66人だから

$$\text{事象 } B \text{ が起こる確率 } P(B) = \frac{66}{100} = \frac{33}{50} \dots\dots(2)$$

男子でかつメガネをかけている人は、100人中36人だから

$$\text{事象 } A \cap B \text{ が起こる確率 } P(A \cap B) = \frac{36}{100} = \frac{9}{25} \dots\dots(3)$$

となります。

で！ (4)が今回の主役です。

裏情報！

「男子である」ことがすでにわかっているときの、その人が「メガネをかけている」確率を求めます。

つまり、事象 A が起こったことがわかったとして、事象 B が起こる確率を求めようってわけです。この確率を、 A が起こったときの B が起こる条件付き確率といって、記号で $P_A(B)$ と表します！

いま、男子であることがすでにわかっているのだから、男子60人を全体として考え直すわけです。

男子60人中、メガネをかけている人は36人だから

$$P_A(B) = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

ってことになります！

この話から、条件付き確率 $P_A(B)$ の定義は次のとおりです。

覚えておけ！ 条件付き確率の定義

2つの事象 A, B に対して、 $n(A) \neq 0$ とします。このとき、条件付き確率 $P_A(B)$ は、 A を全事象とした場合の事象 $A \cap B$ が起こる確率であると考え、次のように定義します。

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

ちょっとコメント 実際の計算では…

条件付き確率を定義したものの、意外と使い勝手がよくないです。そこで、本問を例に $P_A(B)$ の計算にちょっと手を加えましょう。

$$P_A(B) = \frac{36}{60} = \frac{\frac{36}{60}}{\frac{60}{60}} \quad \leftarrow \text{分母・分子を 100 で割ったよ。}$$
$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ってなりますよねエ。ということで、次の公式が得られます。実際の計算では、こちらの方が実用的です。

条件付き確率

ある試行における 2 つの事象 A, B に対して A が起こったときの B の条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{で計算できる！}$$

ちなみに、この式を変形すると

$$P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A) \quad \leftarrow \text{両辺に } P(A) \text{ をかけた。}$$

とも表せます。これを確率の**乗法定理**といいます。

■ 答案

表より

$$(1) \quad P(A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \quad \text{答} \quad (2) \quad P(B) = \frac{66}{100} = \frac{33}{50} \quad \text{答}$$

$$(3) \quad P(A \cap B) = \frac{36}{100} = \frac{9}{25} \quad \text{答}$$

$$(4) \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} \quad \text{答}$$

	男子	女子	合計
メガネ有	36 人	30 人	66 人
メガネ無	24 人	10 人	34 人
合計	60 人	40 人	100 人

ちょっとコメント $P(A \cap B)$ と $P_A(B)$ のちがい

中には、「 $P(A \cap B)$ と $P_A(B)$ は何が違うの？」と感じる人もいるかもしれません。どちらも、言葉で表すと「 A が起こって、 B が起こる確率」

と表現できる気がするからです。でも

$P(A \cap B)$ …… **A が起こるかどうかわからない状況**で、 A も起こり B も起こる確率

$P_A(B)$ …… **すでに A が起こっていることがわかっている状況**で、さらに B も起こる確率

のように、両者はまったく違うものです。

2 くじを戻さない場合の確率

くじ引きの話です。

例題 2 非復元抽出

★★★★☆

8本のくじの中に当たりくじが3本ある。一度引いたくじは元に戻さないものとする。始めにAが1本引き、次にBが1本引くとき

(1) 2人とも当たる確率を求めよ。

(2) Bが当たる確率を求めよ。

? ナイスな 思考プロセス

問題は割とシンプルなのですが、条件付き確率を意識するために、あえて記号で整理してみましょう。

いま、Aが当たる事象をA

Bが当たる事象をB とすると……

2人とも当たる事象は $A \cap B$ です!!

ここで

$$P(A) = \frac{3}{8}, \quad P_A(B) = \frac{2}{7}$$

Aが引く時点では、当たりは8本中3本あります。

Aが当たったときに、Bが当たる確率。Bが引く時点で、当たりは7本中2本しかありません。

となりますよね?

つてなワケで、乗法定理から2人とも当たる確率 $P(A \cap B)$ は

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

(1)の答えで一歩!

(2)は、Bが当たる場合が2通りあることに注意!!

[1] Aが当たり、Bも当たる場合…… $A \cap B$ (1)です。

[2] Aがはずれ、Bが当たる場合…… $\bar{A} \cap B$

ということで、求める確率 $P(B)$ は

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

[1]と[2]は互いに排反なので、確率のたし算でOKです。

を計算することになります。

ここで、(1)と同じように

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B), \quad P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$$

Aがはずれた上で、Bが当たる確率。

を計算すれば解決ですね!

||| 答案

Aが当たる事象をA、Bが当たる事象をBとする。

(1) 2人とも当たる事象は $A \cap B$ であるから

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P_A(B) \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28} \end{aligned}$$

答

(2) Bが当たるのは

[1] Aが当たり、Bも当たるとき ($A \cap B$)

[2] Aがはずれ、Bは当たるとき ($\bar{A} \cap B$)

の2つの場合である。

よって、求める確率 $P(B)$ は

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B) \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

答

Aが引いたので、くじは全部で7本。はずれたから当たりはまだ3本あります。

ちょっとコメント くじ引きの公平性

本問を通じて、Aが当たりくじを引く確率とBが当たりくじを引く確率は等しいことがわかりました。

3 病気のお話

何やら暗くなるような話ですが、こんな例題をどうぞ。

例題 3 病気の検査

★★★★☆

ある病気 X にかかっている人が 4 % いる集団 A がある。病気 X を診断する検査で、病気 X にかかっている人が正しく陽性と判定される確率は 80 % である。また、この検査で病気 X にかかっていない人が誤って陽性と判定される確率は 10 % です。

集団 A のある人がこの検査を受けたところ陽性と判定された。この人が実際に病気 X にかかっている確率を求めよ。

? ナイスな 思考プロセス

この手の問題は、記号を使って整理していくのがポイントです。

ある人が「陽性と判定される」という事象を E 、「病気 X にかかっている」という事象を A とおくことにします。そうすると

$\bar{E}$ ……陰性と判定される

$\bar{A}$ ……病気 X にかかっていない

ってことです。

ある人が陽性と判定された上で、この人が実際に病気 X にかかっている確率。

で、本問は結局、条件付き確率 $P_E(A)$ を求めりゃいいってことになります。つまり

$$\frac{P(E \cap A)}{P(E)}$$

を計算すればいいってことです。

4 % の確率。

さて、「ある人」が陽性と判定されたわけですが、陽性と判定される場合には次の 2 パターンがあります。

[1] 病気 X にかかっている、陽性と判定される場合 $\longrightarrow A \cap E$ の場合

[2] 病気 X にかかっておらず、陽性と判定される場合 $\longrightarrow \bar{A} \cap E$ の場合

というわけで

96 % の確率。

$$P(E) = P(A \cap E) + P(\bar{A} \cap E)$$

となります。

つまり、 $P(A \cap E)$ 、 $P(\bar{A} \cap E)$ を計算することが当面のミッションとなります。

$$P(A \cap E) = P(A)P_A(E), \quad P(\bar{A} \cap E) = P(\bar{A})P_{\bar{A}}(E)$$

を利用すればいいけそうですネ！

|| 答案 ||

ある人が「陽性と判定される」という事象を E 、「病気 X にかかっている」という事象を A とおく。

条件付き確率 $P_E(A) = \frac{P(E \cap A)}{P(E)}$ を求めればよい。

ここで

$$P(A \cap E) = P(A)P_A(E)$$

病気 X にかかっている（とわかっている）人が正しく陽性と判定される確率は 80 % でした。

$$= \frac{4}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{4}{125}$$

$$P(\bar{A} \cap E) = P(\bar{A})P_{\bar{A}}(E)$$

病気 X にかかっていない（とわかっている）人が誤って陽性と判定される確率は 10 % でした。

$$= \frac{96}{100} \times \frac{10}{100} = \frac{12}{125}$$

よって $P(E) = P(A \cap E) + P(\bar{A} \cap E)$

$$= \frac{4}{125} + \frac{12}{125} = \frac{16}{125}$$

であるから

$$P_E(A) = \frac{P(E \cap A)}{P(E)} = \frac{\frac{4}{125}}{\frac{16}{125}} = \frac{1}{4} \quad \text{答}$$

2

第1章 場合の数と確率

おこづかい UP 大作戦！

数学 A …pp.70-76 4STEP 数学 I + A (数学 A 編) …138~149

1 原因の確率

本題に入る前に、前回の条件付き確率に絡んだ一風変わった問題を紹介しておきます。

例題 1 原因の確率

★★★★☆

3 回に 1 回の割合で忘れ物をする太郎さんが、コンビニ、公園、レストランに寄った後、自宅に戻ったとき、傘を置き忘れていないことに気づいた。このとき、2 番目に寄った公園に置き忘れてきた確率を求めよ。ただし、傘はコンビニ、公園、レストランのいずれかに忘れたものとする。

? ナイスな思考プロセス

本問で求めるべき確率は、「公園に傘を置き忘れる確率」ではナイ！！つまり、傘を置き忘れないという話を除外します。求めたいのは、「**傘を置き忘れたのを前提として**、その場所が公園である条件付き確率」です！！

事象を整理しましょう。いま、

コンビニ、公園、レストランのどこかに傘を置き忘れる事象を A 、

公園に傘を置き忘れる事象を B

とします。このとき、求める確率は $P_A(B)$ です。

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ より、欲しいのは $P(A)$ 、 $P(A \cap B)$ です。

$P(A)$ は余事象を利用しましょう。

(コンビニ、公園、レストランのどこかに傘を置き忘れる確率) = $1 - (\text{どこにも傘を置き忘れない確率})$

なので

$$P(A) = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{19}{27}$$

コンビニに置き忘れず、公園にも置き忘れず、レストランにも置き忘れずの確率。

となります。

一方、 $P(A \cap B)$ → コンビニに置き忘れず、公園に置き忘れる確率

つつうことで

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

です！！

あとは、答案にて。

公園に置き忘れた！
コンビニに置き忘れず！

|| 答案 ||

コンビニ、公園、レストランのどこかに傘を置き忘れる事象を A 、公園に傘を置き忘れる事象を B とする。このとき、求める確率は $P_A(B)$ である。

$$\text{ここで } P(A) = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{19}{27}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

であるから

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{19}{27}} = \frac{6}{19} \quad \text{答}$$

ちょっとコメント 原因の確率

ここで出てきた $P_A(B)$ は、**事象 A が起きたことを知って、それが原因 B から起こったと考えられる確率**と考えることができるから、**原因の確率**と呼ばれます。

2 どのくらい期待できる？を数値化したもの

では、本題です。偶然に左右されるいくつかのことからあつて、その結果がどの程度期待できるのか、ということの数値化する方法があります。

とは言っても、よくわからないと思うので、具体的な例で考えてみましょう。

ひょっとしたら、毎月のおこづかいを上げられるかもしれませんよ。

例題 2 期待値

★★★★☆

- (1) 1個のさいころを1回投げるとき、出る目の期待値を求めよ。
- (2) 袋の中に6点の球が2個、3点の球が1個、0点の球が3個入っている。袋から球を1個取り出してもとに戻すことを2回行って、取り出した球の点数の合計を得点とする。このとき、合計得点の期待値を求めよ。

? ナイスな 思考プロセス

耳慣れない言葉が問題文にありますが、どんな計算をすればよいか、まずは(1)を例にその方法を伝授します。意味はあとから考えましょう。

手順1 起こりうる結果をすべて列挙せよ！

さいころを1回投げることによって、起こりうる結果は

「1の目が出る」、「2の目が出る」、「3の目が出る」、「4の目が出る」、「5の目が出る」、「6の目が出る」の計6通りです。

手順2 それぞれの結果が起こる確率を求めよ！

ここでは、どの場合も確率 $\frac{1}{6}$ で起こります。

なんのこっちゃという感じがしますが、例えば、3の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ なので、 $3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ といった具合です。

手順3 (起こりうる結果の数値) × (その確率) の和を計算せよ！

下のような表にまとめておくと便利です。

さいころの目	1	2	3	4	5	6	合計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

必ず起きる確率は1なので、合計は必ず1になります。

で、この表をもとにして

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

と計算するわけですが……

この $\frac{7}{2}$ が、さいころを1回投げるとき、出る目の期待値というわけです。

出る目の期待値が $\frac{7}{2}$ (=3.5) というのは、

さいころを投げるという試行を繰り返し行い、出た目の平均をとると、それが3.5に近づいていく

ということを意味します。

では、(2)はどうでしょう？

合計得点として考えられるのは、0点、3点、6点、9点、12点の5通りです。

6個中3個が0点の球。

0点……2回とも0点の球が出る $\longrightarrow \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$

3点……3点の球が1回、0点の球が1回 $\longrightarrow 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{36}$

0点→3点と出るか、3点→0点と出るか。

6点……6点の球が1回、0点の球が1回 または 3点の球が2回 $\longrightarrow 2 \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$

9点……6点の球が1回、3点の球が1回 $\longrightarrow 2 \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{4}{36}$

12点……6点の球が2回 $\longrightarrow \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{4}{36}$

ってなつてで、下のような表が作れます。

合計得点	0	3	6	9	12	合計
確率	$\frac{9}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	1

あとは、(合計得点)×(確率)を計算して加えればOKです！！

$$0 \times \frac{9}{36} + 3 \times \frac{6}{36} + 6 \times \frac{13}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 12 \times \frac{4}{36} = 5 \text{ (点)}$$

これで終わりですね。

ちょっとコメント 期待値の意味

(1)で期待値を計算した式と、(2)の式を次のように変形します。

$$(1): \frac{1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 1 + 6 \times 1}{6}$$

$$(2): \frac{0 \times 9 + 3 \times 6 + 6 \times 13 + 9 \times 4 + 12 \times 4}{36}$$

これらを……

(1): 1から6までの目を足して6で割ったもの

(2): 9個の0と6個の3と13個の6と4個の9と4個の12を足して、合計個数の36で割ったものとして見ると、これってまさに平均じゃねーか！と気づきます。

しかも、(2)に関しては、出やすい点数ほど足す個数が多くなっていますよね。このように、出やすさに応じて、足す個数を調整して平均をとったものを**加重平均**といいます。

つまり、期待値とは、**試行の結果に確率の重みを付けた加重平均**とも考えることができます。

■ 答案

(1) 1から6までのそれぞれの目が出る事象はいずれも $\frac{1}{6}$ であるから、求める期待値は

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} \quad \text{答}$$

(2) 合計得点は0点、3点、6点、9点、12点の場合がある。

$$[1] \text{ 0点のとき } \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{9}{36}$$

$$[2] \text{ 3点のとき } 2 \times \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{36}$$

$$[3] \text{ 6点のとき } 2 \times \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$$

$$[4] \text{ 9点のとき } 2 \times \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{36}$$

$$[5] \text{ 12点のとき } \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{4}{36}$$

よって、求める期待値は

$$0 \times \frac{9}{36} + 3 \times \frac{6}{36} + 6 \times \frac{13}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 12 \times \frac{4}{36} = 5 \text{ (点)} \quad \text{答}$$

合計得点	0	3	6	9	12	合計
確率	$\frac{9}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	1

覚えておこう！ 期待値

変数 X のとりうる値を $x_1, x_2, \dots, x_n$ とし、 X がこれらの値をとる確率を、それぞれ $p_1, p_2, \dots, p_n$ とするとき、

$$E = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

を X の期待値といいます。

では、期待値の使い道を紹介しましょう。ここでやっとタイトルのおこづかいUP作戦が実行されます。

山内さんは、1 か月分のおこづかいの受け取り方として、以下の A 案、B 案が提示されている。1 年間のおこづかいの受け取り方として、有利な方はどちらか。

A 案：毎月 1 回さいころを投げ、出た目の数が 1 から 4 のときは 2000 円、出た目の数が 5 または 6 のときは 6000 円を受け取る。

B 案：毎月 1 回さいころを投げ、奇数の目が出たら 8000 円、偶数の目が出たら 100 円を受け取る。

？ ナイスな 思考プロセス

A 案、B 案のそれぞれについて、1 か月のおこづかいの期待値を計算してみましょう。

[1] A 案 ← もらえる金額の全種類を列挙し、その確率を計算します。

金額	2000	6000	合計
確率	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

よって、金額の期待値は

$$2000 \times \frac{4}{6} + 6000 \times \frac{2}{6} = \frac{10000}{3} \text{ (円)}$$

[2] B 案

金額	8000	100	合計
確率	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

よって、金額の期待値は

$$8000 \times \frac{3}{6} + 100 \times \frac{3}{6} = 4050 \text{ (円)}$$

あとは、それぞれ 12 倍すれば、1 年間の期待値（期待金額）がわかります。

■ 答案

A 案、B 案それぞれの 1 か月に受け取るおこづかいの期待値（期待金額）は

$$\text{A 案： } 2000 \times \frac{4}{6} + 6000 \times \frac{2}{6} = \frac{10000}{3} \text{ (円)}$$

$$\text{B 案： } 8000 \times \frac{3}{6} + 100 \times \frac{3}{6} = 4050 \text{ (円)}$$

よって、1 年間のおこづかいの期待値は

$$\text{A 案： } \frac{10000}{3} \times 12 = 40000 \text{ (円)}$$

$$\text{B 案： } 4050 \times 12 = 48600 \text{ (円)} \quad \leftarrow \text{こっちの方が断然高い！}$$

したがって、B 案の方が有利である。 **答**

3 おまけのお話～確率の最後の話題として～

ここまで確率を勉強してきましたが、そもそも確率の起源はどこにあるのでしょうか？

未来のことのよう、まだ起きていないできごとが起きる可能性を数学的に測る、という視点が明確に文献に残ったのは、パスカルとフェルマーの手紙が最初とされています。

「2 人が同じ金額を出し合って、先に 3 勝した方が、掛け金を全額もらえるという賭けをしたが、一方が 2 勝 1 敗したところで、やむをえず勝負を中止することになった。このとき、掛け金はどのように分配すべきか。」

この問題は、パスカルが友人シュバリエ・ド・メレから相談されたもので、パスカルは数学者であるフェルマーに答えを求めたのですが、この手紙をきっかけにパスカルとフェルマーの間で往復書簡が始まり、現代の確率論につながる議論へと発展したと言われています。

最後の話題として、この疑問に期待値を使って答えを与えましょう。

例題4 期待値の応用

この色の例題は授業では扱いません。ちょっとした応用問題または説明の要らない問題です。

★★★★☆

互角の能力をもつ A, B が勝負し、先に 3 回勝った方に賞金 100 万円が与えられるというゲームをする。しかし、A が 2 勝、B が 1 勝した時点で、ゲームを中断せざるを得なくなった。このとき、A と B にいくらずつ賞金を分配するのが公平か。ただし、引き分けになることはないものとする。

? ナイスな 思考プロセス

そもそもどのように考えていけばよいか、ですが……

仮にゲームが続行できたとして、A, B のそれぞれが 3 回勝つ確率を求め、その確率をもとにもらえる期待金額を考えてみてはどうでしょうか。

[1] A が 3 回勝つ場合は……

㊦ 4 戦目に A が勝つ場合

㊦ 4 戦目に B が勝ち、5 戦目に A が勝つ場合

のどちらかです。

したがって、その確率は

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

と計算できます。

[2] B が 3 回勝つ場合は……

4 戦目、5 戦目ともに B が勝つ場合

しかありません。 ← あでに A は 2 勝しているの、1 回でも A が勝つと A の優勝が決まります。

この場合の確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \leftarrow \text{ちなみに、[1]の余事象としても求められます。}$$

ですね。

で、期待金額なのですが……

本来、A, B ともにもらえる金額は 100 万円か 0 円のどちらかです。よって、A がもらえる金額の期待値（期待金額）は

賞金	100 万	0 円	合計
確率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

という表をつくることによって

$$100 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 75 \text{ (万円)}$$

と求めることができます。

続きは答案にて。

■ 答案

このゲームを続行できたと仮定して、A, B のそれぞれが 3 回勝つ確率を求める。

[1] A が先に 3 回勝つ場合

4 戦目に A が勝つ または 4 戦目に B が勝ち、5 戦目に A が勝つ 場合であるから、その確率は

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

よって、A が受け取る賞金の期待値は

$$100 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 75 \text{ (万円)}$$

[2] B が先に 3 回勝つ場合

4 戦目も 5 戦目も B が勝つ場合であるから、その確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \leftarrow 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ としても OK であ。}$$

よって、B が受け取る賞金の期待値は

$$100 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4} = 25 \text{ (万円)}$$

以上より、**A に 75 万円，B に 25 万円**を分配するのが公平と言える。 **答**

おめでとう！

これにて場合の数と確率は免許皆伝です。

次回からは、数学Ⅰの内容に移ります。ご用意を。