ギャザーを数式で表す

1．研究の動機

布を縮めたときに生じる「ギャザー」は、服飾のデザインに大きく関わる。しかし、縮め方と完成するギャザーの関係を論理的に表せる式は見つからなかった。ギャザーを数式として一般化できれば、誰でも簡単に作りたい形のギャザーを作れるようになると考え、本研究では、布を縮めたときの「波の数」と「振幅」を観察し、縮め率とギャザーの特徴を数式的に表すこと目的とした。

2．研究①

目標：自分で作ったギャザーを測定し、波数と振幅を、縮めた長さ(余長)から数式に表すことを目標とした。

ギャザーの作成、測定の方法

材料： 幅 7cm・長さ 30cm の布片、25cm のストロー
実験方法： 布片にトンネル状のマチを縫い、ストローを通して縮めた。縮める長さを変えながら波数と振幅を測定した。
条件： 30cm 布を 25cm、20cm、15cm、10cm、5cm に縮める（縮め率 0.167～0.833）
測定項目： 1．波数(ｎ)
2．振幅(Ａ)
指標： 余長割合(ｒ)＝(30－縮め後の長さ) ÷ 30
→ 縮めた長さの割合を表す。

図１<例10cm：波の数 2、振幅 約 4.4cm>

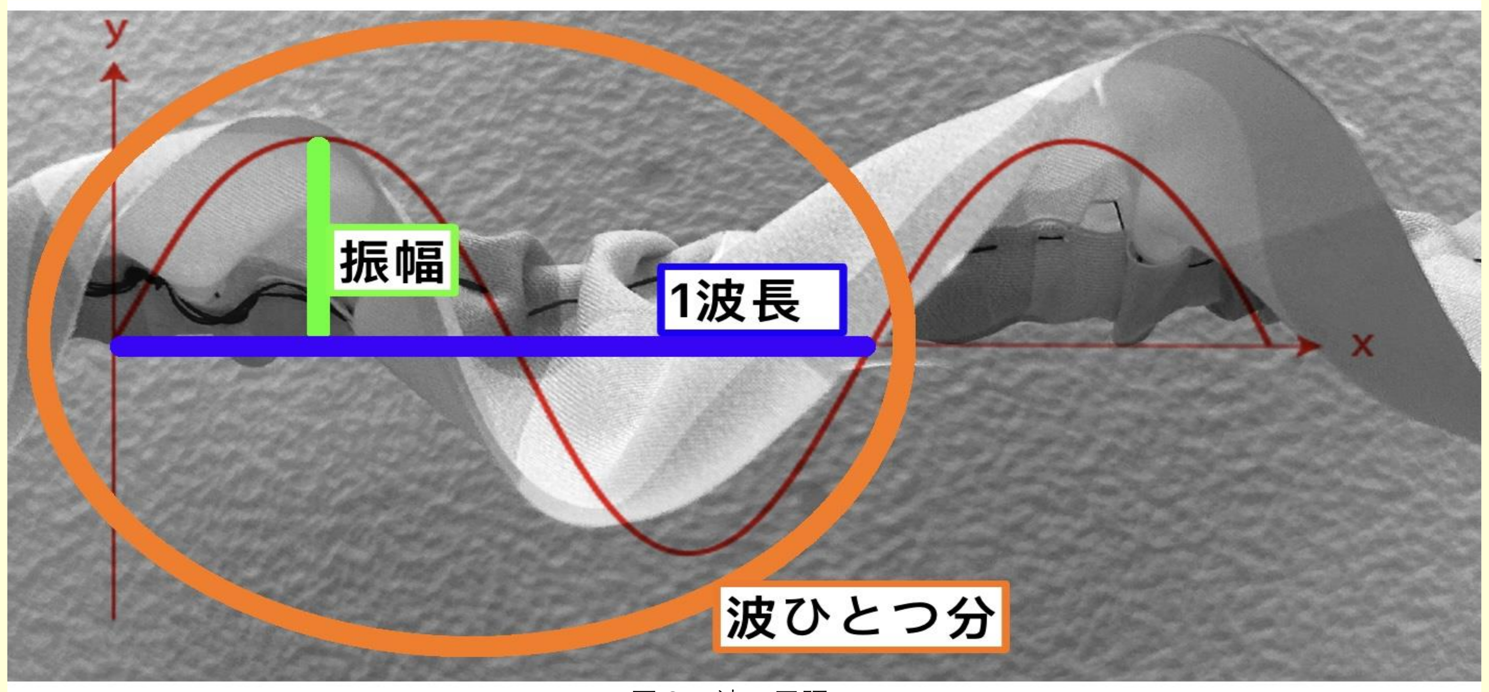

図２　波の用語

表１　実測値と余長割合

縮めた後の長さ L (cm)	波数 n	波長 λ(cm)	測定振幅 A (cm)	余長割合
25	2.0	12.5	1.8	0.167
20	2.0	10.0	2.0	0.333
15	2.0	7.5	2.9	0.500
10	2.0	5.0	4.4	0.667
5	2.5	2.0	5.2	0.833

⇒**振幅**：余長割合とほぼ比例的に増加
（例：余長割合 0.167 で 1.8cm、0.833 で 5.2cm）

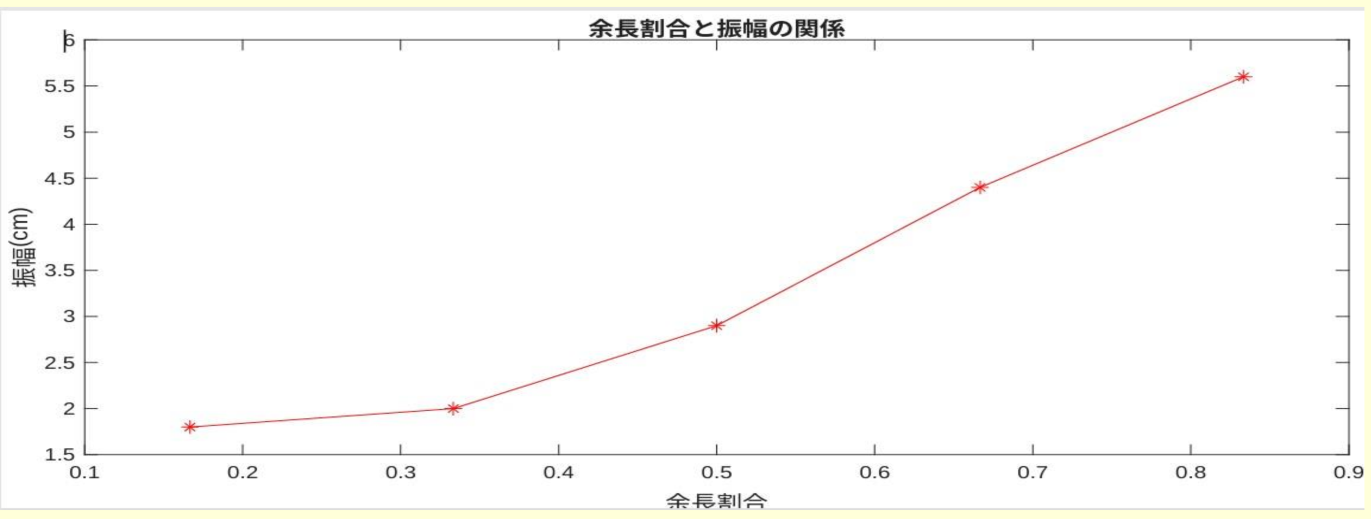

図３ 余長割合と振幅の関係

⇒**波数**：縮めてもほぼ「2 回分」で安定し、極端に縮めた場合のみ2.5 回分に増加。

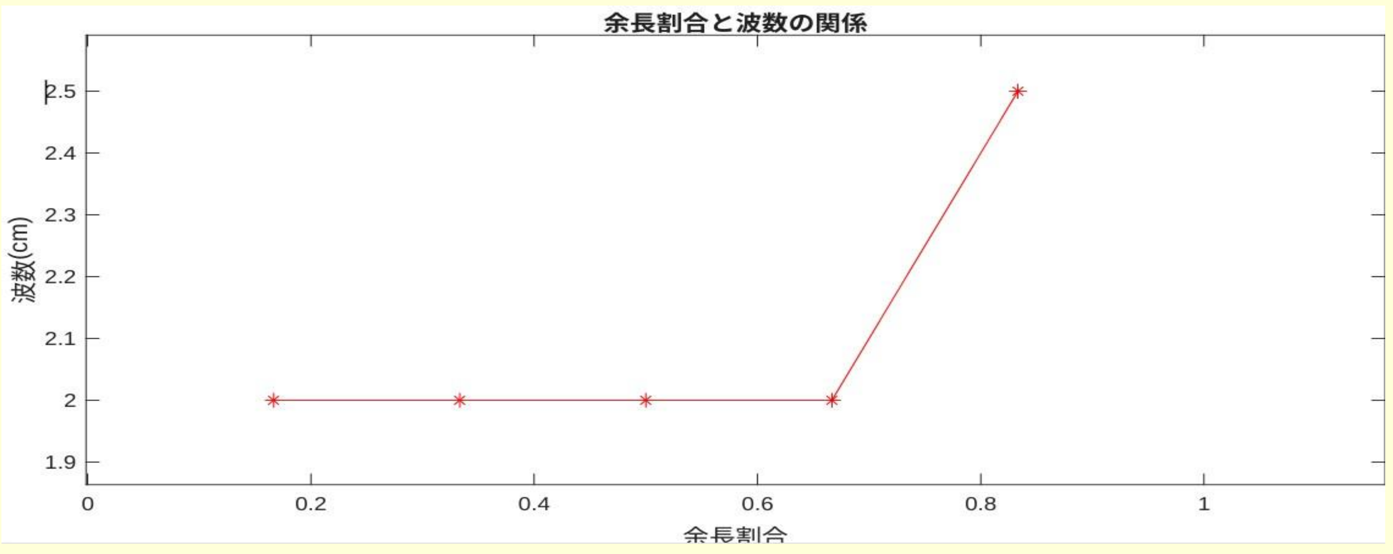

図４ 余長割合と波数の関係

図１より、ギャザーの振幅 A と余長割合 rについてMatlabを用いて近似すると以下の一次関数の式を得ることができた。

A ≒6.2r　・・・①

また、図２より 波数 n は 2 ≦ n ≦2.5であることが分かった。

測定結果からギャザーを数式で近似することができたが、近似できるプロセスについて深く考えたいと思ったので、ギャザーについての先行研究を調べることにした。
(⇒研究②へ)

3．研究②

ギャザーについての先行研究を探したが、私の測定方法と類似しているものや感覚的な研究が多く、数理的に解析された論文が見つからなかった。英語の論文を検索したところ、医療の特に皮膚科の研究で、肌のしわについて物理学的に解析し数式化された(しわ理論)論文が見つかった。自分の研究に当てはめられるのではないかと思い、以下の研究に取り組むことにした。

しわ理論の応用方法

しわ理論は、力や座屈といった力学分野であるが、力は布が相手だと小さくて測れないので、幾何学モデルのアイディアを切り取って応用した。以下の式は**波数と長さが決まっているときにのみ有効**で、**振幅を計算で予測**できる。 $r \approx \frac{1}{4}(Ak)^2$ ・・・(8)

方針

ギャザーを正弦波とみなし、正弦波の曲線の長さを求める。
波数は実測値を使い、曲線の長さが30になるように振幅を調整する。その振幅を**予測振幅**とした。

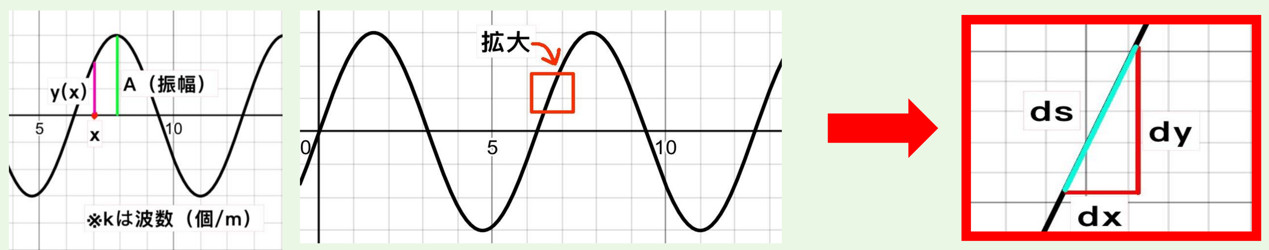

図５　Geometry and Physics of Wrinkling

正弦波を(1)の式で表す

$$y(x) = Asin(kx) \quad ・・・(1)$$

これを x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = Akcos(kx) \quad ・・・(2)$$

正弦波を拡大したときに、グラフの長さの一部は（3）の式で表せる。

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad ・・・(3)$$

（3）を変形すると（4）になる

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \quad ・・・(4)$$

1波長は2πなので、1波長分のグラフの長さは(5)で表せる。

$$L = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \quad ・・・(5)$$

全ての波長の合計は2π/ k である。(5)に(2)を代入すると、すべてのグラフの長さは(6)で表せる。

$$L = \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \sqrt{1 + A^2k^2cos^2(kx)} dx \quad ・・・(6)$$

x がとても小さいとき、以下の近似が成り立つ。(小スロープ近似)

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad (x \ll 1)$$

よって

$$\sqrt{1 + A^2k^2cos^2(kx)} \approx 1 + \frac{A^2k^2cos^2(kx)}{2}$$

この近似を(6)に用い、積分を解くと（7）の式が成り立つ。

$$L \approx \frac{2\pi}{k}(1 + \frac{A^2k^2}{4}) \quad ・・・(7)$$

実測値で余長は $L - \lambda$ で表せる

$$L - \lambda = \frac{2\pi}{k}(1 + \frac{A^2k^2}{4}) - \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{k}(\frac{A^2k^2}{4})$$

余長割合は $r = \frac{L-\lambda}{L}$

$$r = (\frac{2\pi}{k})(\frac{A^2k^2}{4})/\frac{2\pi}{k} = \frac{A^2k^2}{4}$$

従って、余長割合 r と1メートルあたりの波の個数 k を使って振幅 A の式を(8)で表せる

$$r \approx \frac{1}{4}(Ak)^2 \quad ・・・(8)$$

波数は実測値を使い、余長割合と波の密度を計算で求め、(８)の式に当てはめることで、**予測振幅A'**の値を求めることができた。(表２)

表２　測定振幅と予測振幅の差

縮めた長さ	波の密度k (2πn/L(m))	波長 λ(cm)	余長割合	測定振幅 A (cm)	予測振幅 A'（cm)
0. 25	50.3	12.5	0.167	1.8	1.63
0. 20	62.8	10.0	0.333	2.0	2.47
0. 15	83.8	7.5	0.500	2.9	4.40
0. 10	125.7	5.0	0.667	4.4	9.82
0.05	314.2	2.0	0.833	5.2	12.3

研究②では、正弦波とみなせるほど傾きが整っているときにのみに限定して幾何学的に考察した。傾きが整っているとき(余長割合が小さいとき)に関しては、この式によって導き出された振幅と測定振幅は似た値になった。
傾きが乱れる(余剰割合が大きくなる)につれ測定振幅との誤差が大きくなった。これは正弦波とみなせなくなっていったからだと考えられる。また、余剰割合が小さいときに関しては、この式は有効であると考えられる。

4．研究③

研究③では波数について考えた。研究①の実験の中で、波数は縮める長さに関わらずほとんど一定であった。波数は何に関係して変わるのか疑問に思い、研究③に取り組んだ。実物を使っての実験では、制御できるギャザーの形に制限があるので、コンピューター上でのシミュレーションを用いて計測した。

仮説 1. 波数はストロー付近にできた波（ここから先は「上部の波」と呼ぶ）の数が増えるにつれて増え、比例するように変わる。
2. 実験では上部の波の数は常に25付近であったので、25付近で波数は実験の結果である2.0に近い値になる。

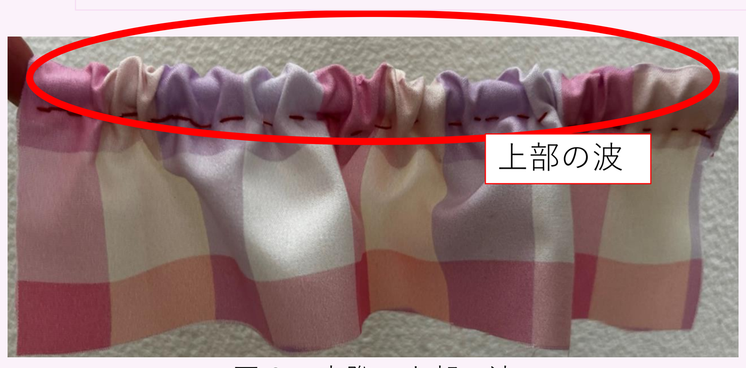

図６　実際の上部の波

表３　研究①の上部の波の数の測定結果

縮めた長さ	上部の波の数
30cm→25cm	26
30cm→20cm	23
30cm→15cm	26
30cm→10cm	26
30cm→5cm	計測不可(過密)

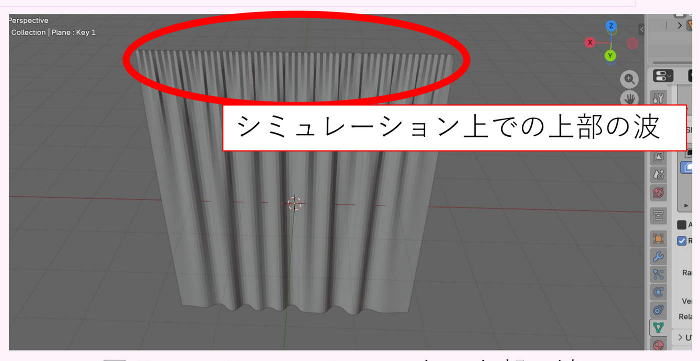

図７　シミュレーション上の上部の波

研究方法 上部の波を制御するため、 3DCGソフトBlender を用いてシミュレーションを行った。余長割合は30cm→25cm の条件に統一し、上部の波を 50、25、10、5 に設定して波数を比較した。

研究結果

①上部の波50 波数6.5
②上部の波25 波数7.0
③上部の波10 波数8.0
④上部の波5　波数7.0

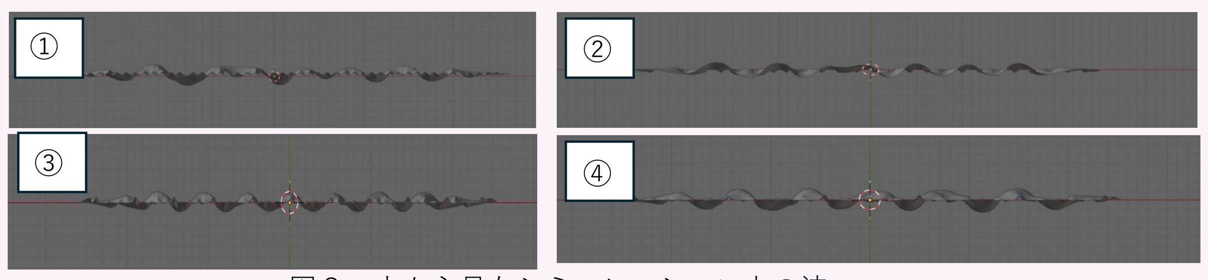

図８　上から見たシミュレーション上の波

【仮説1について】上部の波の数を50から25まで減らしたときは、仮説とは違い波数が増えていった。しかし、上部の波の数を10から5まで減らしたときは、波数が8.0から7.0に減った。このことから、波数は上部の波の数と何らかの関係はあると考えられるが、上部の波を半分にしても波数が一定の割合で変化していないため、比例関係や反比例関係であるとは言えない。

【仮説2について】また、上部の波を25付近に設定しても波数は実験値2.0とは大きく異なる7.0であった。このことから、波数は上部の波の数だけで決まるのではなく、他の条件（布の曲げ剛性や伸縮性などの物性、また固定方法などの境界条件など）にも影響を受けている可能性があると考えられる。

まとめと展望

研究①では、実験値をもとに MATLAB を用いてギャザーを数式化した。研究②では、余長割合と振幅の関係に着目し、余長割合が小さい場合にはしわ理論で近似できることが分かった。研究③では、上部の波の数と波数の関係をシミュレーションで調べたが、両者に明確な比例関係は見られなかった。
ただし、②③はいずれも理論やシミュレーションによるものであり、現実の布とは差がある可能性がある。
今後は、シミュレーションおよび実験の両方において布の硬さを変化させ、物性の違いが波数や振幅にどのような影響を与えるかを比較・検討したい。

6．参考文献

第11回　座屈：日本機械学会誌（https://www.jsme.or.jp/kaisi/1212-36/）
大阪市立大学学術機関リポジトリ/剪断座屈に起因するしわについて（https://ocu-omu.repo.nii.ac.jp/records/2015138）
しわ理論：E. Cerda and L. Mahadevan/Geometry and Physics of Wrinkling（https://softmath.seas.harvard.edu/wp-content/uploads/2019/10/2003-03.pdf）