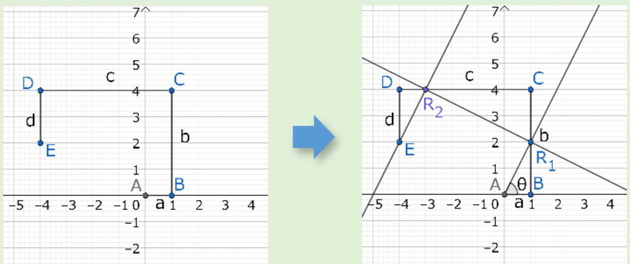
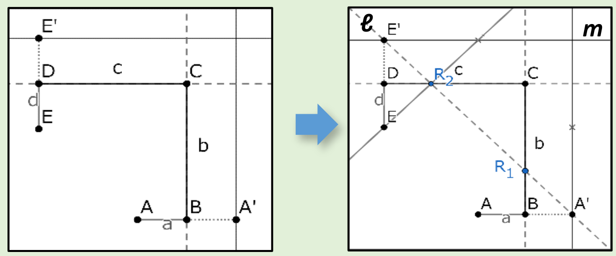
折り紙を用いた重解の判別

研究の目的
折り紙を利用することによって、3次方程式を視覚的に捉えられるようにする。

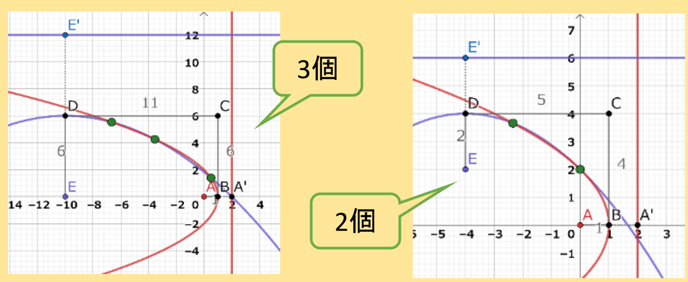
リルの解法とは
① 3次方程式$ax^3+bx^2+cx+d=0$($\mathrm{a}\geq 0, \mathrm{b}\geq 0, \mathrm{c}\geq 0, \mathrm{d}\geq 0$)について、直交座標平面上に下の左のように作図する。
② 点Aから出発して各直線で反時計回りに90°曲がり、点Eに到達するような経路を描く。曲がった地点をそれぞれR_1、R_2とする。
③ $\angle \mathrm{BAR}_1=\theta$とすると、$x=-\tan\theta$がこの三次方程式の解となる。



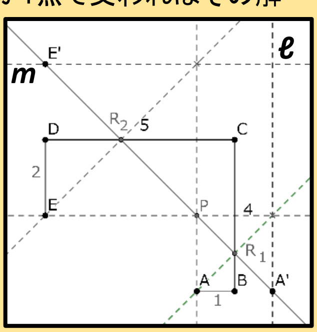
折り紙で3次方程式を解く
① 点Dに関して点Eと対称な点をE'、点Bに関して点Aと対称な点をA'とする。
② 点E'を通り直線CDに平行な直線ℓ、点A'を通り直線BCに平行な直線mをそれぞれ引く。
③ 点Eが直線ℓ、点Aが直線mに同時に重なるような折り目をつける
④ ③で付けた折り目と直線BC、直線CDの交点をそれぞれR_1、R_2とする。
⑤ $\angle \mathrm{BAR}_1=\theta$となる。



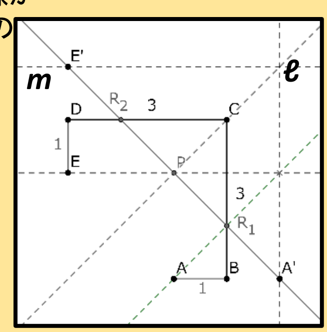
折り紙と放物線
① 2つの放物線の交点のうちy≥0の範囲での交点の個数は、3次方程式における解の個数と一致する。
② 3次方程式の実数解が重解の時には、**2つの放物線の共通接線における接点は一致する。**
③ 3次方程式の実数解が三重解のときには、②の関係に加えて、**接点は2点線分$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2$の中点と一致する。**



折り紙で重解を判別する
① AR_1、ER_2でそれぞれ折る。
② ℓとAR_1の交点を通りy軸に平行な直線を引く。
③ mとER_2の交点を通りx軸に平行な直線を引く。
④ ②、③の直線と直線$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2$が1点で交わればその解は重解である。



折り紙で三重解を判別する
① 2点R_1、R_2が重なるように折り、線分$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2$の中点を求める。
② mと直線ER_2の交点を通りy軸に平行な直線を折る。
③ ①で求めた点と②の直線が直線$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2$で交わればこの実数解は三重解である。



結果
- 3次方程式が重解をもつ。

⇔2つの放物線が接する点で共通接線をもつ。
⇔接点とそれぞれの放物線の準線の距離が等しい。
- 3次方程式が三重解をもつ。

⇔接点は線分$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2$の中点と一致する。

今後の課題
- 係数に負の数が含まれている場合もこのような法則があるのか調べる。
- 4次以上の高次方程式についても重解を持つ条件を考える。