第4章 確率論の基礎

Koishikawa Philosophy II

10 確率の初歩

統計的確率と数学的確率の違いをおさえよう。

3 学期は，統計学を支える柱である「確率論」について触れてみます。確率の考え方は，降水確率や宝くじの当たりやすさなど，比較的身近なものに見られるので，ある程度は感覚的に理解しているかもしれませんが，要は，**あることがらが起こりやすいか起こりにくいかを数値で表してみよう**という考えから生まれたのが確率です。

確率の考え方は，課題探究を進める上で，（研究内容によっては）必須の知識となるため，小石川フィロソフィⅡで，その基本的な考え方と計算技能を身につけておきましょう。

1．確率は 2 種類あります

正しく作られたさいころを 1 回投げるとき，どの目が出るかは誰にもわかりません。ところが，さいころの目は 1 から 6 までなので，さいころを 1 回投げたときに起きる結果の可能性は，1～6 のいずれかの目が出るという 6 通りの結果のうちのどれか 1 つです。

よって，さいころを 1 回投げたときに 1 の目が出る確率は，6 つの可能性のうちの 1 つだから，$\frac{1}{6}$ になります。このような考え方から求めた確率のことを，$\boxed{\qquad\qquad}$ といいます。

それに対し，さいころを 100 回投げたときに，そのうち 20 回 1 の目が出たとすると，1 の目が出る確率は $\frac{20}{100}$ と計算できます。このような考え方から求めた確率のことを，$\boxed{\qquad\qquad}$ といいます。

ここでは，数学的確率 $\frac{1}{6}$ と統計的確率 $\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$ は異なる値となりました。このように，（さいころを投げるという行為を）実行する回数が少ないと，統計的確率と数学的確率の間にはズレが生じます。ところが，さいころを投げる回数を何百回，何千回，何万回とどんどん増やしていくにしたがい，1 の目が出る割合は数学的確率 $\frac{1}{6}$ に限りなく近づいていきます。

このように，あることの実施回数を増やせば増やすほど，統計的確率が数学的確率に近づいていくことを，確率の $\boxed{\qquad\qquad}$ といいます。

2．さいころを投げてみよう

さいころを投げる回数が増えれば増えるほど，1 の目が出る統計的確率が，数学的確率に近づいていくのか，実際にさいころを投げて実験してみましょう。

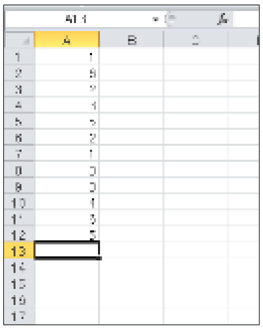
(1) 生活班でグループをつくる

グループの 1 人がタブレットを用意し（この人を「代表者」と呼びます），Excel を起動します。残りのメンバーは 1 人 3 個さいころをもちます。

(2) さいころをひたすら投げて出た目を記録する

代表者以外のメンバーはひたすらさいころを投げます。このとき，投げる人の作為が入らないように，きちんと転がるように投げます。

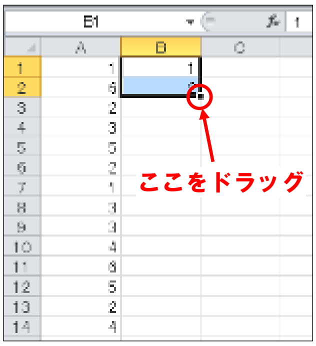
そして，出た目を読み上げ，代表者が Excel に記録していきます。代表者は右の図のように，A1 セルから順に，数値を入力していきます。



(3) 集計表をつくる

(2)の作業を時間が許す限りくり返します。

ひととおり作業を終えたら，代表者は集計します。以下のようにExcel シート上に入力してください。



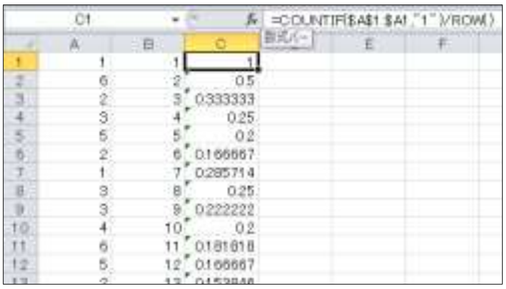
① B 列に 1 行目からデータが入っている最後の行まで「1，2，3，4，……」を入力します（右のように B1 セルに 1，B2 セルに 2 を入力した後，B1，B2 セルを両方選択して，右下の■を最後の行までドラッグすると簡単に入力できます）。

ここに「$」は入らないので注意！

② C1 セルに

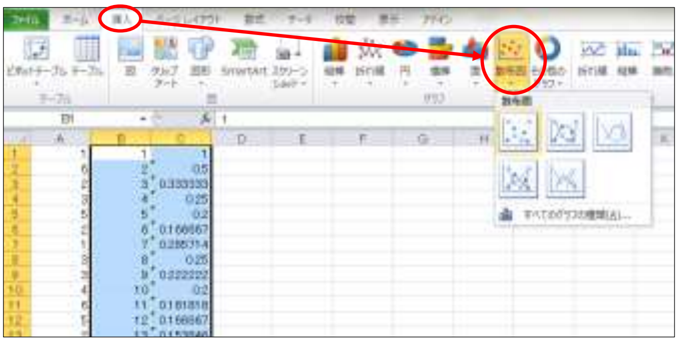
「＝**COUNTIF(A1:$A1,"1")/ROW()**」

と入力し，C1 セルを選択後，右下の■を最後の行までドラッグします。



◎ この式の意味は？

③ B 列，C 列の，データが入力されている範囲をすべて選択し，リボンメニューから「挿入」→「散布図」→「 」を選択します。



(4) 完成したグラフを観察しよう

できればすべての班のデータを合計して集計したものをグラフ化しましょう。

◎ グラフからわかること

3．数学的確率の求め方

正しくつくられたさいころを投げるとき，どの目が出るかの結果は全部で 6 通りあり，その 6 通りのどれが起こることも同じ程度に期待できます。

このようなとき，それぞれの結果が起こることは $\boxed{}$ といいます。

あることがらについて，どの結果が起こることも同様に確からしいときに限り，次の計算によって数学的確率を求めることができます。

起こりうる結果が全部で n 通りあり，そのどれが起こることも同様に確からしいとする。このとき，あることがら A の起こる場合が a 通りあるとすると，A が起こる確率は

$$\frac{\text{ことがら } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}=\frac{a}{n}$$

で求められる。

例 1　まずは簡単な例を見てみましょう。

(1)　1 個のさいころを 1 回投げたとき，出る目が 3 の倍数である確率は？

(2)　1 個のさいころを 1 回投げたとき，出る目が 3 の倍数でない確率は？

(3)　赤玉 3 個，青玉 2 個，黄玉 5 個が入った袋から玉を 1 個取り出すとき，赤玉が出る確率は？

(4)　1 組のトランプのカード 52 枚からカードを 1 枚ひいたとき，エースが出る確率は？

(5)　白玉 5 個が入った袋から玉を 1 個取り出すとき，白玉が出る確率は？

(6)　白玉 5 個が入った袋から玉を 1 個取り出すとき，黒玉が出る確率は？

この例から，次のことがわかります。

あることがらが A の起こる確率を p とすると，p の範囲は次のようになる。

$0 \leqq p \leqq 1$

$p=0$ のとき，そのことがらは決して起こらない。

$p=1$ のとき，そのことがらは必ず起こる。

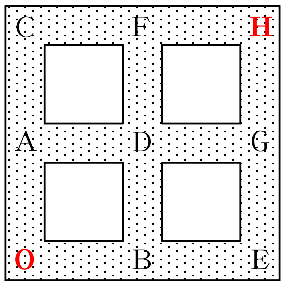
また，A の起こらない確率は，$1-p$ で求めることができる。

4．工夫して数えよう

複雑な確率の問題に挑戦する前に，あることがらが起こる場合の数を工夫して数える方法をまとめておきましょう。場合の数を知るためには，すべての場合をもれなく，かつ重複もなく数える必要があります。場合の数が多ければ多いほど整理しながら数えないと間違える危険性があるため，決められたルールのもとで，図や表を利用して整理しながら数えなくてはいけません。

(1) 　　　　を使って整理する

右の図のような道を通って，地点 O から地点 H まで遠回りしないで行くのに，どのような道順があるかを調べてみましょう。



◎ すべて挙げてみましょう

・ O → A → C → F → H

・

これをもっとわかりやすく数えるためには……

(2) 表を使って整理する

2 個のさいころを投げるときに起こるような場合の数は，右のような表をつくって整理するとわかりやすくなります。

例えば，2 個のさいころ A，B を投げるとき，A の目が B の目の約数になる場合が何通りあるか，右の表を使って数えてみましょう。

表によると，全部で　　　　通りとなります。

B＼A	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

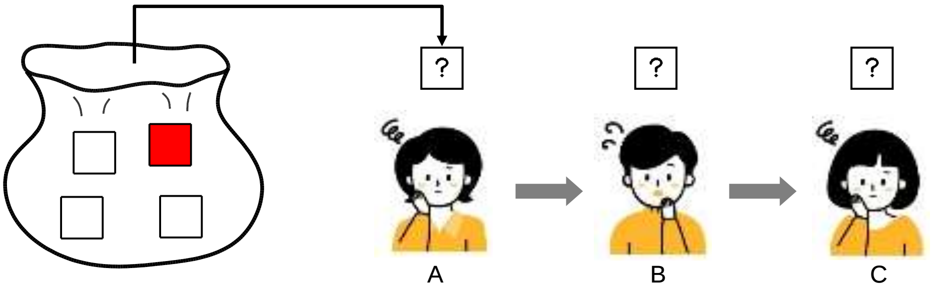
11 確率の落とし穴

数学者も間違えた！？　勘違いしやすい確率の話を紹介。

直感的には正しいと感じても，それが論理的には正しくない，といったことが確率論にはよくあります。ここでは，典型的な例をいくつか紹介しましょう。

1．くじをひく順番の話

1 本の当たりくじと，3 本のはずれくじの計 4 本のくじが入った袋があります。この袋から，A，B，C の 3 人がこの順で 1 本ずつくじをひくとき，誰が最も当たりやすいでしょうか？　ただし，ひいたくじは袋の中に戻さないものとします。



(1)　**あなたの予想**

①　A が当たりやすい　　②　B が当たりやすい　　③　C が当たりやすい

④　変わらない　　⑤　わからない

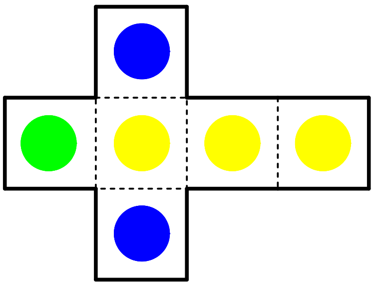
(2)　**話し合ってみよう**

A，B，C のそれぞれが当たる確率は，どのように求めたらよいでしょうか？

(3)　**結論**

２．変わったさいころ

３ 面に黄色のシール，２ 面に青色のシール，１ 面に緑色のシールが貼られたさいころがあります。これを同時に ２ 個投げたとき，どの２色の組み合わせが最も出やすいでしょうか。



(1)　２色の組み合わせをすべて挙げよう

(2)　どの組み合わせが最も出やすいか予想しよう

(3)　実験

①　２人１組になって
　・さいころを投げる人
　・記録する人
のように分担しましょう。

②　60 回さいころを投げ，どの色の組み合わせがでやすいか確かめます。1 回目から 60 回目について，投げて出た組み合わせの欄に〇印をつけていきましょう。

色の組み合わせ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
と																														
と																														
と																														
と																														
と																														
と																														

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

(4)　結果

□ と □ の組み合わせが最も出やすい！

(5)　考察

3．誕生日の話

たまたま集まった 40 人のクラスで，「同じ誕生日の人がいる確率」はどのくらいでしょうか。

⑴　**予想**

次の①～④のうち，この確率として最も近い値はどれだと思いますか？

① 30 %程度
② 50 %程度
③ 70 %程度
④ 90 %程度
⑤ その他

⑵　**計算**

どのように計算したらよいでしょうか？　計算が面倒な場合は，Excel を使っても OK です。

⑶　**結論**

40 人のクラスの中に，「同じ誕生日の人がいる確率」は，

約　　　　%

である！！

4．モンティ・ホール問題

A, B, C の 3 つのドアがあります。

そのうちの 1 つのドアの向こうに景品があり，残りの 2 つのドアの向こうには何もありません。

1 人のゲームの参加者が，この 3 つのドアのうち 1 つのドアを開けて，そこに景品があれば景品をもらえます。ただし，参加者がドアを開けるまでに，司会者と参加者の間で次のようなかけひきがあります。

① 参加者がドアを 1 つ選ぶ（ドアはまだ開けない）。
② 景品が入っているドアを知っている司会者が，残りの 2 つのドアから景品が入っていないドアを 1 つ開ける。
③ 司会者が参加者に「ドアの選択を変更してもよい」と告げる。
④ 参加者が 2 つのドアから最終的に選んだドアを開ける。

では，問題。このゲームで，③の後に景品を当てたい参加者は，ドアを変更すべきでしょうか。変更しない方が当たる可能性が高いでしょうか。

(1) 実験

4 人 1 組のグループをつくり，トランプで模擬実験します。4 人のグループを 2 人ずつの A チーム，B チームに分け，

A チーム……選択肢を変えない（そのまま選ぶ）
B チーム……選択肢を変える（選び直す）

とします。

2 人のうちの一方が司会者，もう一方が参加者として，50 回実験を行う。

(2) 結果

下の表を埋めてみよう。

A：選択肢を変えない（そのまま選ぶ）		B：選択肢を変える（選び直す）	
当たり　　　回	はずれ　　　回	当たり　　　回	はずれ　　　回

確率に直すと…

A：選択肢を変えない（そのまま選ぶ）		B：選択肢を変える（選び直す）	
当たる確率：	はずれる確率：	当たる確率：	はずれる確率：

結果は…

参加者は，選択肢を　**変えるべきである**　・　**変えるべきではない**　・　**変わらない**

(3) 考察

第1章
第2章
第3章
第4章
第5章

Column　4．確率論についての雑談

(1)　確率論の幕開け

フランスの数学者ブレーズ・パスカル（1623～1662）は，ある貴族から次のような質問を投げかけられました。

「AとBの2人が，先に3回勝った方が勝ちとする勝負をする。Aが2回勝ち，Bが1回勝ったところで勝負を中止したら，AとBへのかけ金の配分は，いくらずつにすれば公平か。」

この質問に対し，パスカルは，同じフランスの数学者であるピエール・ド・フェルマー（1607～1665）と手紙で意見交換をしながら問題を解決しました。

この手紙が，本格的な確率論の始まりと言われています。

ブレーズ・パスカル

ピエール・ド・フェルマー

(2)　ダランベールの誤り

フランスの数学者であり物理学者でもあるダランベール（1717～1783）は，1枚の硬貨を2回投げるとき，起こり得るすべての場合を，

① 2回とも表
② 1回が表で1回が裏
③ 2回とも裏

と考え，それぞれが $\frac{1}{3}$ の確率で起こると考えました。

この考えは，「ダランベールの誤り」と言われています。

ダランベールの考えのどこに誤りがあるのでしょうか。

(3)　迷惑メールの判別法

電子メールを受信したとき，迷惑メールであることがあります。しかし，最近のメールソフトでは，迷惑メールであると初めから判別して，別の場所に格納しています。このような機能には，メールの中にある単語が迷惑メールにふくまれる確率によって，迷惑メールかどうかを判定する統計的な手法などが用いられています。

たとえば，過去の受信メールを通常のメールと迷惑メールに分類して，データベースに格納しておきます。そして，新たに受信したメールについて，その内容を単語に分割し，データベースの情報を利用して，「該当単語をふくむメールが迷惑メールである確率」を求め，この確率が大きければ，受信メールは迷惑メールに分類されます。さらに，分類されたメールの情報は，新たに受信したメールを迷惑メールかどうか判別する際に利用されます。