数学Ⅲ　教科書　補足プリント①　(p19～23)　ド・モアブルの定理

3　ド・モアブルの定理

> **ド・モアブルの定理**
> 　n が整数のとき　$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

例6　(1)　$\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^4 = \cos\dfrac{4}{3}\pi + i\sin\dfrac{4}{3}\pi = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(2)　$\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{-6} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$　終

☆ド・モアブルの定理の証明☆　(数学的帰納法)　気になる人は一読を。

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$　(n:整数)…①

(証明)　$z = \cos\theta + i\sin\theta$　とおく。

[１]　n が正の整数の場合

(ⅰ)　$n=1$ のとき　①の左辺＝右辺は明らかに成り立つ。

(ⅱ)　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると

$z^k = (\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$　…②

$n=k+1$ のとき

$z^k = z^k \cdot z = (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \cos(k\theta + \theta) + i\sin(k\theta + \theta)$

$= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$

よって $n=k+1$ のとき も成り立つ。

(ⅰ)、(ⅱ) より正の整数 n に対して①は成り立つ。

[２]　$n=0$ のとき

実数と同じように $z^0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$ と定めると①は成り立つ。

[３]　n が負の整数の場合

$n = -m$(m は正の整数)とおく。

$z^{-m} = \dfrac{1}{z^m}$　と定めると、

$z^{-m} = \dfrac{1}{z^m} = \dfrac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m}$　…③

m は正の整数より①から

$(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta$

よって③は $z^{-m} = \dfrac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m} = \dfrac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta}$

$= \dfrac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{(\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos m\theta - i\sin m\theta)}$

$= \dfrac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta}$

$= \cos m\theta - i\sin m\theta$

$= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)$

ゆえに③は $z^{-m} = \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)$

ここで $-m = n$ より

$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

したがって、 n が負の整数の場合 も①が成り立つ。

[１]～[３]より n が整数の時 ①が成り立つ。

例題2　$(\sqrt{3}+i)^{12}$ を計算せよ。

> **解**　$\sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから
>
> $(\sqrt{3}+i)^{12} = 2^{12}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{12}$
>
> $= 2^{12}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 2^{12}\cdot 1 = 4096$

B　n 乗根

自然数 n と複素数 α に対して，$z^n = \alpha$ を満たす複素数 z ($z^n = \alpha$ の解 z)を，α の n **乗根**という。

※0 でない複素数 α の n 乗根は，n 個あることが知られている。

ex)　8 の 3 乗根は 2 ($2^3 = 8$)　、243 の 5 乗根は3 ($3^5 = 243$)

例7　1 の 3 乗根は，数学Ⅱで学んだように，3 つの複素数 $z_0 = 1$，

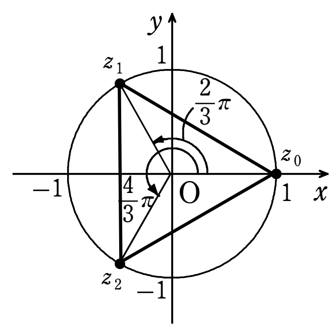
$z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$z_2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$　で，極形式で表すと

$z_0 = \cos 0 + i\sin 0$

$z_1 = \cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$z_2 = \cos\dfrac{4}{3}\pi + i\sin\dfrac{4}{3}\pi$

となる。よって，点 z_0，z_1，z_2 は，
点 1 が分点の 1 つとなるように，
単位円を 3 等分した各分点である。



終

【注意】原点を中心とする半径 1 の円を単位円という。

一般に，n を自然数として，z を 1 の n 乗根としよう。

$z^n = 1$ から　　$|z|^n = |z^n| = 1$

$|z|>0$ より、$|z|=1$

ここで，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，ド・モアブルの定理から

$$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta=1$$

よって，$\cos n\theta=1$，$\sin n\theta=0$ であるから

$$n\theta=2k\pi \quad \text{すなわち} \quad \theta=\frac{2k\pi}{n} \quad (k\text{ は整数}) \quad \text{となる。}$$

逆に，k を整数として

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad \cdots\cdots ①$$

とおくと，ド・モアブルの定理より $(z_k)^n=1$ が成り立つから，z_k は 1 の n 乗根である。また，z_{n+k} と z_k の偏角は 2π だけ異なり，ともに絶対値は 1 であるから $z_{n+k}=z_k$ が成り立つ。よって，① の z_k のうち，互いに異なるものは

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots\cdots,\ z_{n-1} \quad \text{の } n \text{ 個である。}$$

以上より，次のことが成り立つ。

1 の n 乗根

自然数 n に対して，1 の n 乗根は，次の n 個の複素数である。

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

例 8　1 の 6 乗根は

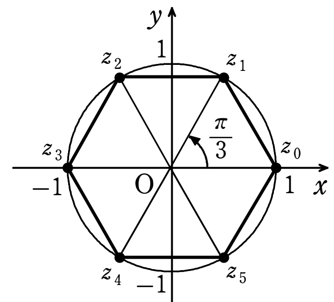
$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

よって　$z_0=1$，　$z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，　$z_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，

$z_3=-1$，$z_4=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$z_5=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　終

例 7 で求めた 1 の 3 乗根，および問 11 で求めた 1 の 4 乗根と同様に，例 8 で求めた 6 個の 1 の 6 乗根は，点 1 が分点の 1 つとなるように，単位円を 6 等分する 6 個の分点を与えている。

よって，これらの点は単位円に内接する正六角形の頂点になっている。



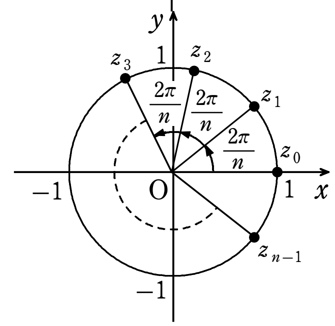
一般に，自然数 n に対して，1 の n 乗根

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

を表す点は，単位円を n 等分する n 個の分点である。

特に，分点の 1 つは点 1 である。



例題 3　方程式 $z^2=1+\sqrt{3}\,i$ の解を求めよ。

解　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$\cdots\cdots$ ①

とすると　$z^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$

$1+\sqrt{3}\,i$ を極形式で表すと

$$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

よって　$r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^2=2,\ 2\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\text{ は整数})$$

$r>0$ であるから　$r=\sqrt{2}$　$\cdots\cdots$ ②

また　$\theta=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると，$k=0$，1 であるから

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi \quad \cdots\cdots ③$$

②，③ を ① に代入すると，求める解は

$$z=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$