

[練習10]

- 解答

(1) 原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点
- (2) 原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転し、原点からの距離を2倍した点
- (3) 原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点

解説

(1) $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$

よって、点 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}z$ は、点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点である。

(2) $\sqrt{3} + i = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

よって、点 $(\sqrt{3} + i)z$ は、点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転し、原点からの距離を2倍した点である。

(3) $-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

よって、点 $-iz$ は、点 z を原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

[問8]

解答 原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点

解説

$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

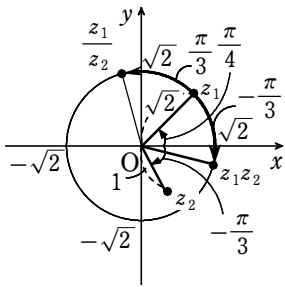
よって、点 $\frac{z}{i}$ は、点 z を原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

[322改訂版 数学Ⅲ 問9]

解答 $z_1 z_2 = \sqrt{2} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right\},$

$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{12} \pi + i \sin \frac{7}{12} \pi \right),$

[図]



解説

$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$

$z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ であるから

$$z_1 z_2 = \sqrt{2} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \right\} = \sqrt{2} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right\}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \right\} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{12} \pi + i \sin \frac{7}{12} \pi \right)$$

点 $z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}$ を図示すると、図のようになる。

[練習11]

解答 $-3 + i$ または $1 + 3i$

解説

点 **B** は、点 **A** を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ または $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点である。

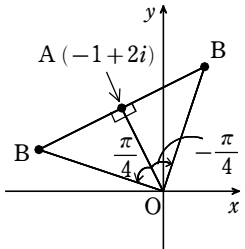
点 **A** を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点を表す複素数は

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) (-1 + 2i) \\ &= (1 + i)(-1 + 2i) = -3 + i \end{aligned}$$

点 **A** を原点を中心として $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点を表す複素数は

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\} (-1 + 2i) \\ &= (1 - i)(-1 + 2i) = 1 + 3i \end{aligned}$$

したがって、点 **B** を表す複素数は $-3 + i$ または $1 + 3i$



[練習12]

解答 (1) 64 (2) $4 - 4i$ (3) i

解説

(1) $1 - \sqrt{3}i = 2 \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\}$ であるから
 $(1 - \sqrt{3}i)^6 = 2^6 \{ \cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi) \} = 2^6 \cdot 1 = 64$

(2) $-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right)$ であるから
 $(-1 + i)^5 = (\sqrt{2})^5 \left(\cos \frac{15}{4} \pi + i \sin \frac{15}{4} \pi \right) = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4} \pi + i \sin \frac{7}{4} \pi \right) = 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 4 - 4i$

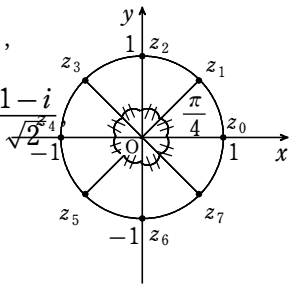
(3) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ であるから
 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{-9} = \cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = i$

[練習13]

解答 $z_0 = 1, z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, z_2 = i, z_3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},$

$z_4 = -1, z_5 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, z_6 = -i, z_7 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$

[図]



解説

1 の 8 乗根は、 $k=0, 1, 2, \dots, 7$ として

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{8} + i \sin \frac{2k\pi}{8}$$

よって

$$z_0 = 1, z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, z_2 = i, z_3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},$$

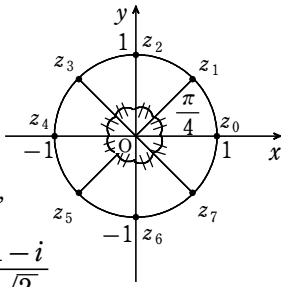
$$z_4 = -1, z_5 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, z_6 = -i, z_7 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

また、これらを表す図は右図。

[練習14]

解答 (1) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -i$

(2) $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$



$$-\frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$(3) \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

解説

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とする。

$$(1) \quad z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \text{ から}$$

$$r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\text{よって} \quad r^3 = 1, \quad 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$r > 0 \text{ であるから} \quad r = 1 \quad \text{また} \quad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると, $k = 0, 1, 2$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{6}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{したがって} \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad -i$$

$$(2) \quad z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi \text{ から}$$

$$r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$\text{よって} \quad r^4 = 1, \quad 4\theta = \pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$r > 0 \text{ であるから} \quad r = 1 \quad \text{また} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると, $k = 0, 1, 2, 3$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3}{4}\pi, \quad \frac{5}{4}\pi, \quad \frac{7}{4}\pi$$

$$\text{したがって} \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$(3) \quad z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) \text{ から}$$

$$r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\text{よって} \quad r^2 = 2, \quad 2\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$r > 0 \text{ であるから} \quad r = \sqrt{2} \quad \text{また} \quad \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると, $k = 0, 1$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{したがって} \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

[練習15]

解答 内分点, 外分点の順に (1) $4 - 2i, 16 + 10i$ (2) $2i, -12 + 14i$

解説

内分点を表す複素数を r , 外分点を表す複素数を δ とする。

$$(1) \quad r = \frac{2(1-5i)+3 \cdot 6}{3+2} = \frac{20-10i}{5} = 4-2i$$

$$\delta = \frac{-2(1-5i)+3 \cdot 6}{3-2} = 16+10i$$

$$(2) \quad r = \frac{2(3-i)+3\{-2(1-2i)\}}{3+2} = \frac{10i}{5} = 2i$$

$$\delta = \frac{-2(3-i)+3\{-2(1-2i)\}}{3-2} = -12+14i$$

[問13]

解答 略

解説

$A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ とし, 線分 BC の中点を $M(z)$ とすると z

$$= \frac{\beta + \gamma}{2}$$

点 δ は線分 AM を 2 : 1 に内分する点であるから $\delta = \frac{\alpha + 2z}{2+1}$

$$= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

[練習16]

解答 (1) 原点を中心とする半径 2 の円 (2) 点 i を中心とする半径 1 の円

(3) 点 $1+i$ を中心とする半径 2 の円

解説

(1) 原点を中心とする半径 2 の円

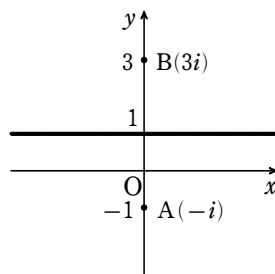
(2) 点 i を中心とする半径 1 の円

(3) $|z - (1+i)| = 2$ より

点 $1+i$ を中心とする半径 2 の円

[練習17]

解答

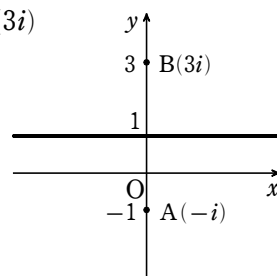


解説

方程式を満たす点 z 全体は, 2 点 $A(-i), B(3i)$

を結ぶ線分 AB の垂直二等分線である。

よって, 求める図形は右の図のようになる。



[練習18]

解答 (1) 点 -3 を中心とする半径 3 の円 (2) 原点を中心とする半径 2 の円

解説

(1) 方程式の両辺を 2 乗すると $9|z+2|^2 = |z-6|^2$

$$\text{よって} \quad 9(z+2)(\overline{z+2}) = (z-6)(\overline{z-6})$$

$$\text{ゆえに} \quad 9(z+2)(\overline{z}+2) = (z-6)(\overline{z}-6)$$

$$\text{展開して整理すると} \quad z\overline{z} + 3z + 3\overline{z} = 0$$

$$\text{よって} \quad (z+3)(\overline{z}+3) = 3^2$$

$$\text{すなわち} \quad |z+3|^2 = 3^2 \quad \text{ゆえに} \quad |z+3| = 3$$

したがって, 求める図形は, 点 -3 を中心とする半径 3 の円である。

(2) 方程式の両辺を 2 乗すると $|z-4i|^2 = 4|z-i|^2$

$$\text{よって} \quad (z-4i)(\overline{z-4i}) = 4(z-i)(\overline{z-i})$$

$$\text{ゆえに} \quad (z-4i)(\overline{z}+4i) = 4(z-i)(\overline{z}+i)$$

$$\text{展開して整理すると} \quad z\overline{z} = 4$$

$$\text{すなわち} \quad |z|^2 = 2^2 \quad \text{ゆえに} \quad |z| = 2$$

したがって, 求める図形は, 原点を中心とする半径 2 の円である。

[練習19]

解答 点 1 を中心とする半径 1 の円

解説

$$w = 1 + iz \text{ から} \quad z = \frac{w-1}{i}$$

$$|z| = 1 \text{ であるから} \quad \left| \frac{w-1}{i} \right| = 1$$

$$\text{よって} \quad |w-1| = 1$$

ゆえに, 点 w は点 1 を中心とする半径 1 の円を描く。

解答 (1) $\gamma = 2 + 4i$ (2) $\delta = \left(2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right)i$

解説

(1) $\gamma - \alpha = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)(\beta - \alpha)$ から

$$\begin{aligned}\gamma - (-2 + i) &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)\{(1 - 3i) - (-2 + i)\} \\ &= i(3 - 4i) = 4 + 3i\end{aligned}$$

よって $\gamma = (4 + 3i) + (-2 + i) = 2 + 4i$

(2) $\delta - \alpha = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)(\beta - \alpha)$ から

$$\begin{aligned}\delta - (-2 + i) &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\{(1 - 3i) - (-2 + i)\} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3 - 4i) \\ &= \left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right) + \left(-2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i\end{aligned}$$

よって $\delta = \left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right) + \left(-2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i + (-2 + i)$

$$= \left(2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right)i$$

[練習21]

解答 $\frac{\pi}{3}$

解説

$$\begin{aligned}\frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} &= \frac{(1 + \sqrt{3}) + (-1 + \sqrt{3})i}{1 - i} = 1 + \sqrt{3}i \\ &= 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

よって $\angle \alpha \beta \gamma = \arg \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\pi}{3}$

[練習22]

解答 (1) $c = \frac{2}{3}$ (2) $c = -1, 2$

解説

$$\begin{aligned}(1) \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} &= \frac{3i - (c + i)}{1 - (c + i)} = \frac{-c + 2i}{(1 - c) - i} = \frac{(-c + 2i)\{(1 - c) + i\}}{\{(1 - c) - i\}\{(1 - c) + i\}} \\ &= \frac{(c^2 - c - 2) + (2 - 3c)i}{c^2 - 2c + 2}\end{aligned}$$

$2 - 3c = 0$ から $c = \frac{2}{3}$

(2) 条件から、2 直線 AB, AC は垂直に交わる (A は、B, C に一致しない)。

(1) から $c^2 - c - 2 = 0$ かつ $2 - 3c \neq 0$

これを解いて $c = -1, 2$

[練習23]

解答 $\angle A = \angle B = \angle C = \frac{\pi}{3}$

解説

$2\gamma - (1 + \sqrt{3}i)\beta = (1 - \sqrt{3}i)\alpha$ から

$$2\gamma - 2\beta + (1 - \sqrt{3}i)\beta = (1 - \sqrt{3}i)\alpha$$

よって $2(\gamma - \beta) = (1 - \sqrt{3}i)(\alpha - \beta)$

ゆえに $\frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

したがって $\angle B = \frac{\pi}{3}$

$\left|\frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}\right| = 1$ であるから $|\gamma - \beta| = |\alpha - \beta|$

よって $BC = BA$

ゆえに、△ABC は正三角形であるから

$$\angle A = \angle B = \angle C = \frac{\pi}{3}$$