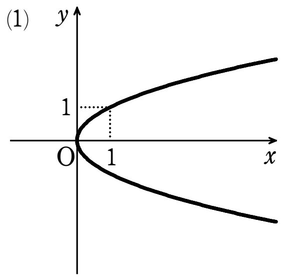
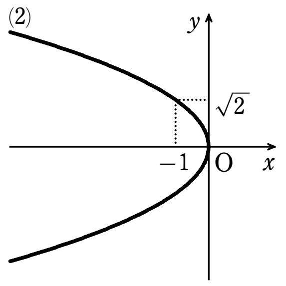
［練習1］

解答　(1)　焦点は点 $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$，準線は直線 $x=-\dfrac{1}{4}$，［図］

(2)　焦点は点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，準線は直線 $x=\dfrac{1}{2}$，［図］





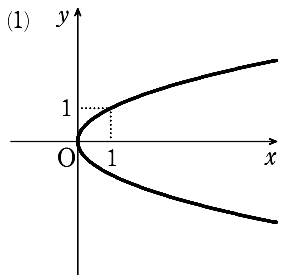
解説

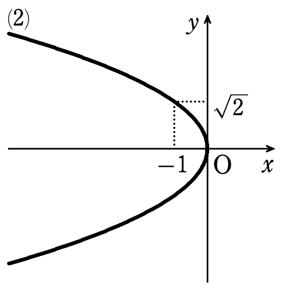
(1)　$y^2=4\cdot\dfrac{1}{4}x$ から，焦点は点 $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$，準線は直線 $x=-\dfrac{1}{4}$ である。

また，概形は図のようになる。

(2)　$y^2=4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)x$ から，焦点は点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，準線は直線 $x=\dfrac{1}{2}$ である。

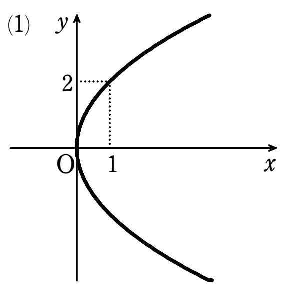
また，概形は図のようになる。

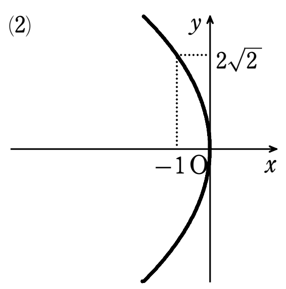




［練習2］

解答　(1)　$y^2=4x$，［図］　　(2)　$y^2=-8x$，［図］





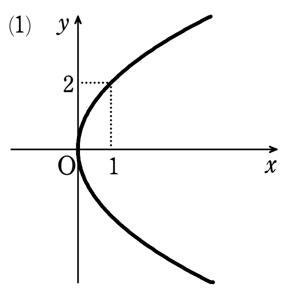
解説

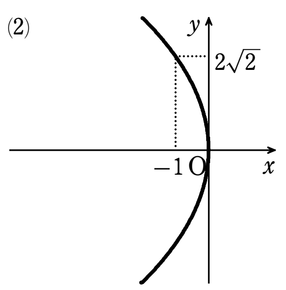
(1)　$y^2=4\cdot1\cdot x$　すなわち　$y^2=4x$

また，概形は図のようになる。

(2)　$y^2=4\cdot(-2)x$　すなわち　$y^2=-8x$

また，概形は図のようになる。





［練習3］

解答　焦点は点 $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$，準線は直線 $y=-\dfrac{1}{4}$

解説

$x^2=4\cdot\dfrac{1}{4}y$ から，焦点は点 $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$，準線は直線 $y=-\dfrac{1}{4}$ である。

［練習4］

解答　(1)　長軸の長さは 10；短軸の長さは 6；

焦点は 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$；

頂点は 4 点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$；

［図］

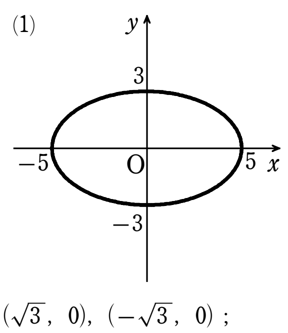
(2)　長軸の長さは 8；短軸の長さは 4；

焦点は 2 点 $(2\sqrt{3},\ 0)$，$(-2\sqrt{3},\ 0)$；

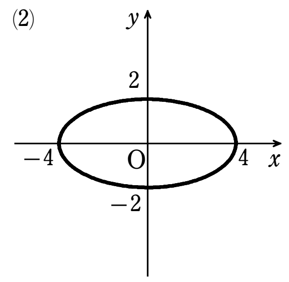
頂点は 4 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$；

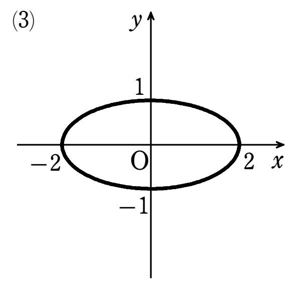
［図］

(3)　長軸の長さは 4；短軸の長さは 2；焦点は 2 点 $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$；



頂点は 4 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$；［図］





解説

(1)　$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ であるから

長軸の長さは　　$2\cdot5=10$

短軸の長さは　　$2\cdot3=6$

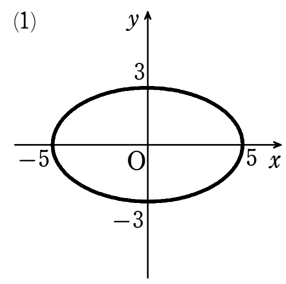
また，$\sqrt{25-9}=4$ であるから

焦点は　　2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$

頂点は

4 点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$

よって，概形は図のようになる。



(2)　$\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ であるから

長軸の長さは　　$2\cdot4=8$

短軸の長さは　　$2\cdot2=4$

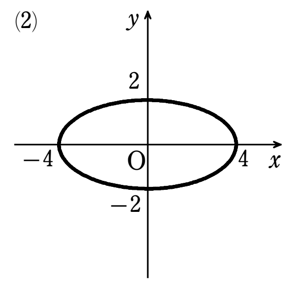
また，$\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$ であるから

焦点は　　2 点 $(2\sqrt{3},\ 0)$，$(-2\sqrt{3},\ 0)$

頂点は

4 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$

よって，概形は図のようになる。



(3)　$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ より，$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$ であるから

長軸の長さは　　$2\cdot2=4$

短軸の長さは　　$2\cdot1=2$

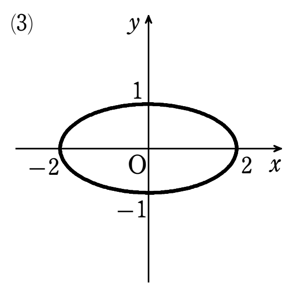
また，$\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ であるから

焦点は　　2 点 $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$

頂点は

4 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$

よって，概形は図のようになる。



［問1］

解答　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

解説

求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

とおける。焦点からの距離の和が 10 であるから

$2a=10$　　よって　　$a=5$

ゆえに　　$b=\sqrt{a^2-3^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

したがって，求める方程式は　　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

［問2］

解答　楕円 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$

解説

円 $x^2+y^2=9$ 上の点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ が移された点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$x=2s$，$y=t$　　　ゆえに　　$s=\dfrac{x}{2}$，$t=y$

$s^2+t^2=9$ から　　$\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+y^2=9$　　すなわち　　$\dfrac{x^2}{6^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

よって，楕円 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ になる。

［練習7］

解答　(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　(2)　楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{64}=1$　　(3)　楕円 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$

解説

円 $x^2+y^2=16$ 上の点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ が移された点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

(1)　$x=s,\ y=\frac{3}{4}t$　　　ゆえに　　$s=x,\ t=\frac{4}{3}y$

$s^2+t^2=16$ から　　$x^2+\left(\frac{4}{3}y\right)^2=16$　　すなわち　　$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

よって，楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ になる。

(2)　$x=s,\ y=2t$　　　ゆえに　　$s=x,\ t=\frac{y}{2}$

$s^2+t^2=16$ から　　$x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=16$　　すなわち　　$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{8^2}=1$

よって，楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1$ になる。

(3)　$x=\frac{3}{2}s,\ y=t$　　　ゆえに　　$s=\frac{2}{3}x,\ t=y$

$s^2+t^2=16$ から　　$\left(\frac{2}{3}x\right)^2+y^2=16$　　すなわち　　$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$

よって，楕円 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ になる。

[練習8]

解答　楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

解説

2 点 A，B の座標を，それぞれ $(s,\ 0)$，$(0,\ t)$ とすると，AB$=7$ であるから

$$s^2+t^2=7^2 \quad \cdots\cdots ①$$

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，P は線分 AB を 4：3 に内分するから

$$x=\frac{3}{7}s,\ y=\frac{4}{7}t$$

よって　　$s=\frac{7}{3}x,\ t=\frac{7}{4}y$

これを ① に代入すると　　$\left(\frac{7}{3}x\right)^2+\left(\frac{7}{4}y\right)^2=7^2$

すなわち　　$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$　……②

ゆえに，条件を満たす点 P は，楕円 ② 上にある。

逆に，楕円 ② 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は，楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ である。

[練習9]

解答　楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$

解説

2 点 A，B の座標を，それぞれ $(s,\ 0)$，$(0,\ t)$ とすると，AB$=5$ であるから

$$s^2+t^2=5^2 \quad \cdots\cdots ①$$

点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると，Q は線分 AB を 2：1 に外分するから

$$x=-s,\ y=2t$$

よって　　$s=-x,\ t=\frac{y}{2}$

これを ① に代入すると　　$x^2+\frac{y^2}{4}=5^2$

すなわち　　$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{10^2}=1$　……②

ゆえに，条件を満たす点 Q は，楕円 ② 上にある。

逆に，楕円 ② 上の任意の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ は条件を満たす。

したがって，求める軌跡は，楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$ である。

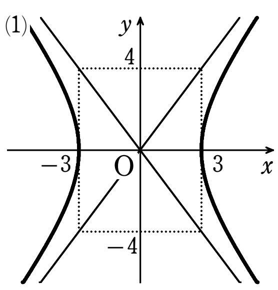
[練習10]

解答　(1)　頂点は 2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$；

焦点は 2 点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$；

漸近線は 2 直線 $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=0$，$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=0$；

[図]

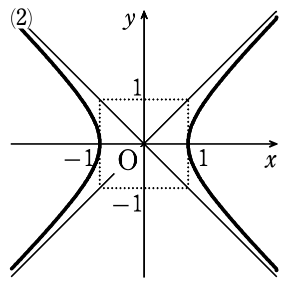


(2)　頂点は 2 点 $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$；

焦点は 2 点 $(\sqrt{2},\ 0)$，$(-\sqrt{2},\ 0)$；

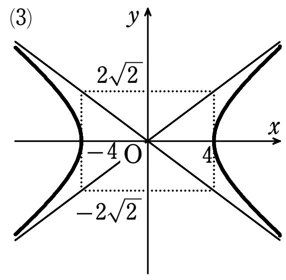
漸近線は 2 直線 $x-y=0$，$x+y=0$；

[図]



(3)　頂点は 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$；焦点は 2 点 $(2\sqrt{6},\ 0)$，$(-2\sqrt{6},\ 0)$；

漸近線は 2 直線 $\frac{x}{4}-\frac{y}{2\sqrt{2}}=0$，$\frac{x}{4}+\frac{y}{2\sqrt{2}}=0$；[図]



解説

(1)　$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^4}=1$ であるから

頂点は　　2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$

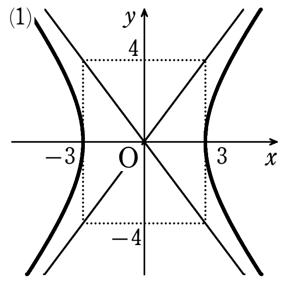
$\sqrt{9+16}=5$ であるから

焦点は　　2 点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$

また，漸近線は

2 直線 $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=0$，$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=0$

よって，概形は図のようになる。



(2)　$\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{1^2}=1$ であるから

頂点は　　2 点 $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$

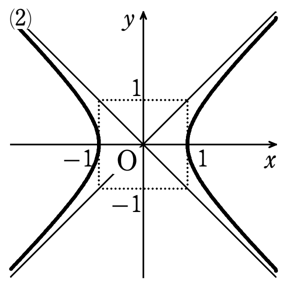
$\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ であるから

焦点は　　2 点 $(\sqrt{2},\ 0)$，$(-\sqrt{2},\ 0)$

また，漸近線は

2 直線 $x-y=0$，$x+y=0$

よって，概形は図のようになる。



(3)　$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2}=1$ であるから

頂点は　　2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$

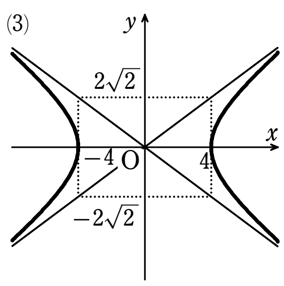
$\sqrt{16+8}=2\sqrt{6}$ であるから

焦点は　　2 点 $(2\sqrt{6},\ 0)$，$(-2\sqrt{6},\ 0)$

また，漸近線は

2 直線 $\frac{x}{4}-\frac{y}{2\sqrt{2}}=0$，$\frac{x}{4}+\frac{y}{2\sqrt{2}}=0$

よって，概形は図のようになる。



[問3]

解答　$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

解説

求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

とおける。焦点からの距離の差が 8 であるから

$2a=8$　　　よって　　$a=4$

ゆえに　　$b=\sqrt{5^2-a^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

したがって，求める方程式は　　$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

[322改訂版　数学Ⅲ　練習11]

解答　$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

解説

求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

とおける。焦点からの距離の差が 4 であるから

$2a=4$　　　よって　　$a=2$

ゆえに　　$b=\sqrt{3^2-a^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

したがって，求める方程式は　　$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

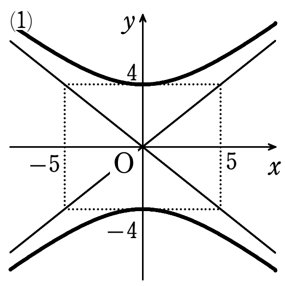
[練習12]

解答　(1)　頂点は 2 点 $(0,\ 4)$，$(0,\ -4)$；

焦点は 2 点 $(0,\ \sqrt{41})$，$(0,\ -\sqrt{41})$；

漸近線は 2 直線 $\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=0$，$\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=0$；

[図]



(2)　頂点は 2 点 $(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$；

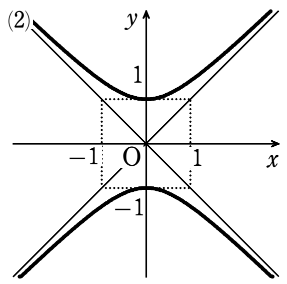
焦点は 2 点 $(0,\ \sqrt{2})$，$(0,\ -\sqrt{2})$；

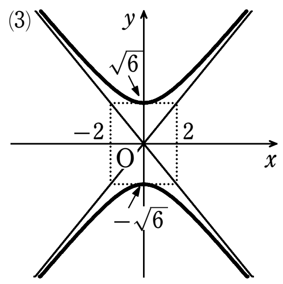
漸近線は 2 直線 $x-y=0$，$x+y=0$；

［図］

(3)　頂点は 2 点 $(0,\ \sqrt{6})$，$(0,\ -\sqrt{6})$；焦点は 2 点 $(0,\ \sqrt{10})$，$(0,\ -\sqrt{10})$；

漸近線は 2 直線 $\frac{x}{2}-\frac{y}{\sqrt{6}}=0$，$\frac{x}{2}+\frac{y}{\sqrt{6}}=0$；［図］





(解説)

(1)　$\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{4^2}=-1$ であるから

頂点は　　2 点 $(0,\ 4)$，$(0,\ -4)$

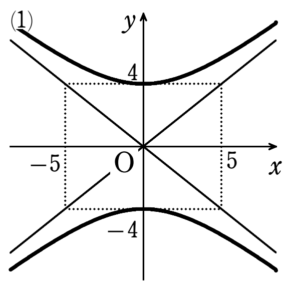
$\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$ であるから

焦点は　　2 点 $(0,\ \sqrt{41})$，$(0,\ -\sqrt{41})$

また，漸近線は

2 直線 $\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=0$，$\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=0$

よって，概形は図のようになる。



(2)　$\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{1^2}=-1$ であるから

頂点は　　2 点 $(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$

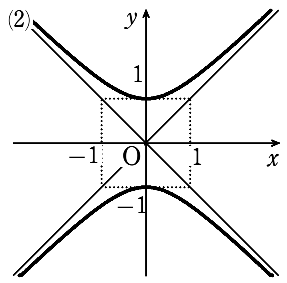
$\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ であるから

焦点は　　2 点 $(0,\ \sqrt{2})$，$(0,\ -\sqrt{2})$

また，漸近線は

2 直線 $x-y=0$，$x+y=0$

よって，概形は図のようになる。



(3)　$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=-1$ より，$\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{6})^2}=-1$ であるから

頂点は　　2 点 $(0,\ \sqrt{6})$，$(0,\ -\sqrt{6})$

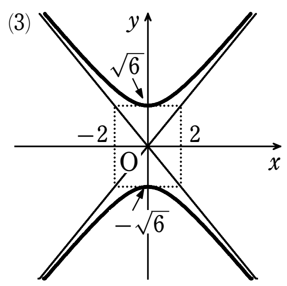
$\sqrt{4+6}=\sqrt{10}$ であるから

焦点は　　2 点 $(0,\ \sqrt{10})$，$(0,\ -\sqrt{10})$

また，漸近線は

2 直線 $\frac{x}{2}-\frac{y}{\sqrt{6}}=0$，$\frac{x}{2}+\frac{y}{\sqrt{6}}=0$

よって，概形は図のようになる。



［練習13］

解答　(1)　$x^2-y^2=2$　　(2)　$x^2-y^2=-4$

(解説)

(1)　焦点が x 軸上にある直角双曲線の方程式は $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ $(a>0)$ とおける。

$\sqrt{a^2+a^2}=2$ から　　$a^2=2$

よって，方程式は　　$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　　すなわち　　$x^2-y^2=2$

(2)　頂点が y 軸上にある直角双曲線の方程式は $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$ $(a>0)$ とおける。

$a=2$ から，方程式は　　$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=-1$　　すなわち　　$x^2-y^2=-4$