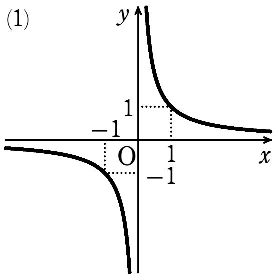
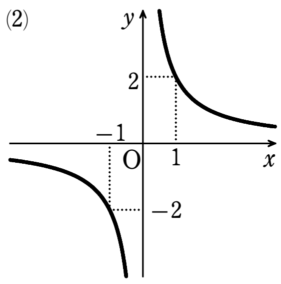
［練習1］

解答

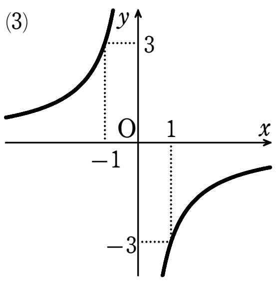
(1)



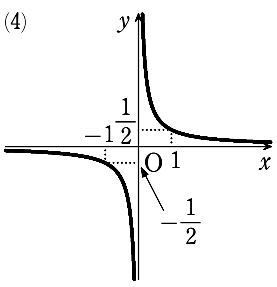

(2)




(3)

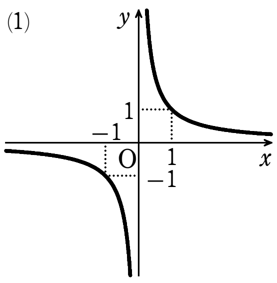



(4)

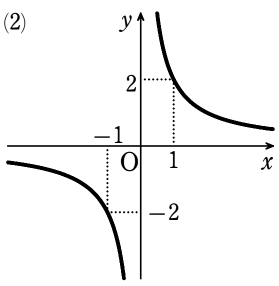



解説

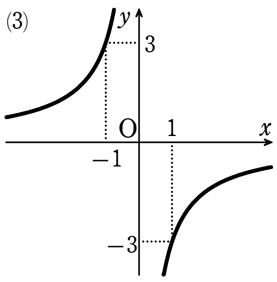
(1)



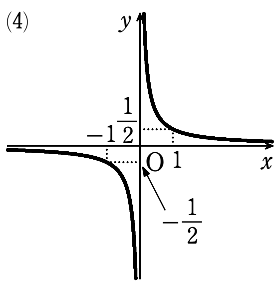

(2)




(3)




(4)



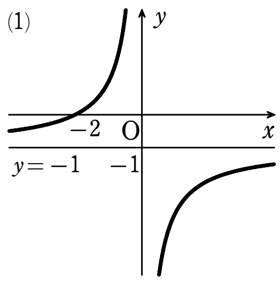

［練習2］

解答 (1)［図］，定義域 $x\neq0$，値域 $y\neq-1$，

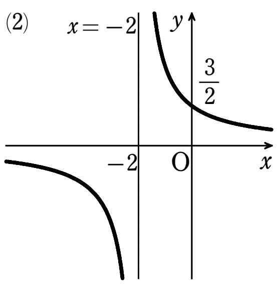
(2)［図］，定義域 $x\neq-2$，値域 $y\neq0$

(3)［図］，定義域 $x\neq1$，値域 $y\neq2$

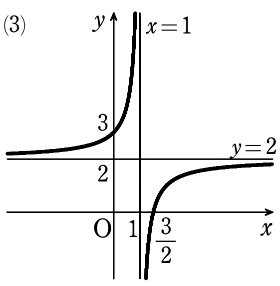
(1)




(2)



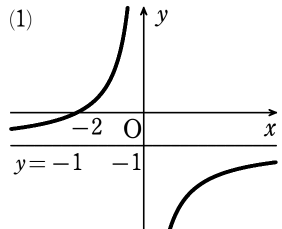

(3)




解説

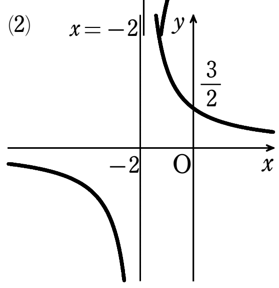
(1)　求めるグラフは，関数 $y=-\dfrac{2}{x}$ のグラフを $y$ 軸方向に $-1$ だけ平行移動した直角双曲線で，漸近線は２直線 $x=0$，$y=-1$ である。
また，定義域は $x\neq0$，値域は $y\neq-1$ である。

(1)



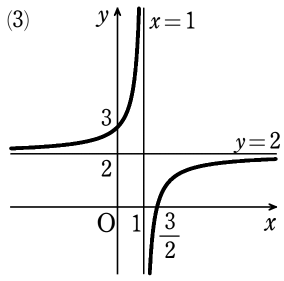

(2)　求めるグラフは，関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $-2$ だけ平行移動した直角双曲線で，漸近線は２直線 $x=-2$，$y=0$ である。
また，定義域は $x\neq-2$，値域は $y\neq0$ である。

(2)



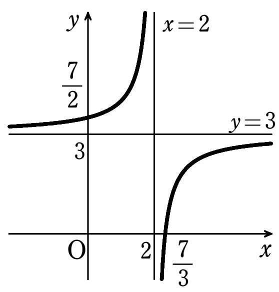

(3)　求めるグラフは，関数 $y=-\dfrac{1}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に１，$y$ 軸方向に２だけ平行移動した直角双曲線で，漸近線は２直線 $x=1$，$y=2$ である。
また，定義域は $x\neq1$，値域は $y\neq2$ である。

(3)




［問1］

解答 ［図］，定義域 $x\neq2$，値域 $y\neq3$



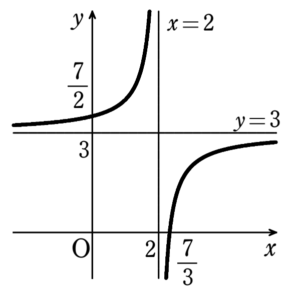

解説

$$\frac{3x-7}{x-2}=\frac{3(x-2)-1}{x-2}$$

$$=-\frac{1}{x-2}+3$$

よって　$y=-\dfrac{1}{x-2}+3$

ゆえに，グラフは右の図の直角双曲線で，漸近線は２直線 $x=2$，$y=3$ である。
また，定義域は $x\neq2$，値域は $y\neq3$ である。



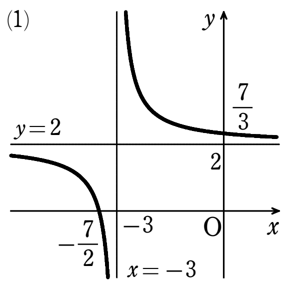

［練習3］

解答 (1)［図］，定義域 $x\neq-3$，値域 $y\neq2$

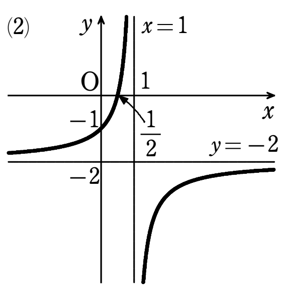
(2)［図］，定義域 $x\neq1$，値域 $y\neq-2$

(3)［図］，定義域 $x\neq\dfrac{1}{2}$，値域 $y\neq2$

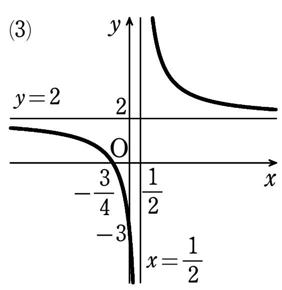
(1)




(2)




(3)

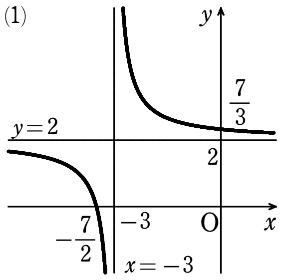



解説

(1) $\dfrac{2x+7}{x+3}=\dfrac{2(x+3)+1}{x+3}=\dfrac{1}{x+3}+2$

よって　$y=\dfrac{1}{x+3}+2$

ゆえに，グラフは右の図の直角双曲線で，
漸近線は2直線 $x=-3$，$y=2$ である。
また，定義域は $x\neq-3$，値域は $y\neq2$ である。

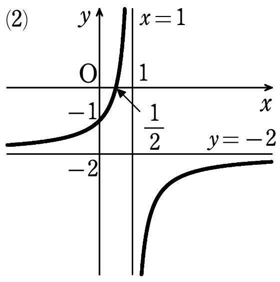



(2) $\dfrac{1-2x}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)-1}{x-1}$

$=-\dfrac{1}{x-1}-2$

よって　$y=-\dfrac{1}{x-1}-2$

ゆえに，グラフは右の図の直角双曲線で，
漸近線は2直線 $x=1$，$y=-2$ である。
また，定義域は $x\neq1$，値域は $y\neq-2$ である。

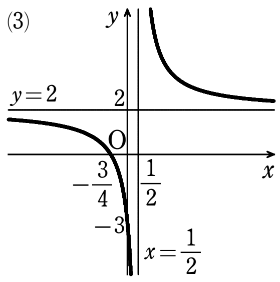



(3) $\dfrac{4x+3}{2x-1}=\dfrac{2(2x-1)+5}{2x-1}=\dfrac{5}{2x-1}+2$

よって　$y=\dfrac{5}{2x-1}+2$

ゆえに，グラフは右の図の直角双曲線で，
漸近線は2直線 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=2$ である。

また，定義域は $x\neq\dfrac{1}{2}$，値域は $y\neq2$ である。




[練習4]

解答 (1) (0, 0)，(2, 4)　(2) (1, 1)，(−1, −3)

解説

(1) 方程式　$\dfrac{2x}{x-1}=2x$　…… ①

の解が共有点の $x$ 座標である。
① の両辺に $x-1$ を掛けると

$2x=2x(x-1)$

整理して　$2x^2-4x=0$

よって　$2x(x-2)=0$

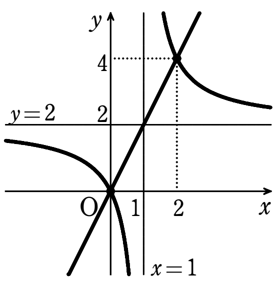
これを解いて　$x=0,\ 2$

$y=2x$ に代入して

$x=0$ のとき　$y=0$

$x=2$ のとき　$y=4$

したがって，共有点の座標は　(0, 0)，(2, 4)




(2) 方程式　$\dfrac{4x+1}{2x+3}=2x-1$　…… ①

の解が共有点の $x$ 座標である。
① の両辺に $2x+3$ を掛けると

$4x+1=(2x-1)(2x+3)$

整理して　$4x^2-4=0$

よって　$4(x+1)(x-1)=0$

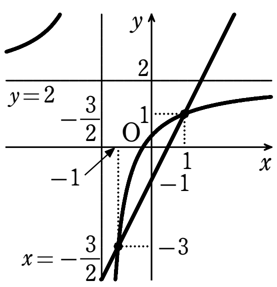
これを解いて　$x=\pm1$

$y=2x-1$ に代入して

$x=1$ のとき　$y=1$

$x=-1$ のとき　$y=-3$

したがって，共有点の座標は　(1, 1)，(−1, −3)




[問2]

解答 $x<-1$，$1<x<2$

解説

$y=\dfrac{2}{x-1}$　…… ①，$y=x$　…… ②

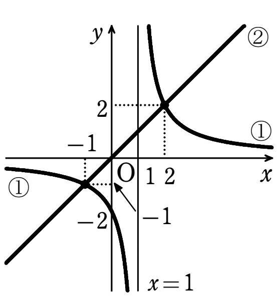
とすると，関数 ① のグラフと直線 ② の共有点の $x$ 座標は，方程式

$\dfrac{2}{x-1}=x$

の解である。これを解いて

$x=-1,\ 2$

求める $x$ の値の範囲は，関数 ① のグラフが直線 ② より上側にあるような $x$ の値の範囲である。
よって，右の図から　$x<-1$，$1<x<2$




[練習5]

解答 (1) $x=-4,\ 1$　(2) $x<-4$，$-2<x<1$

解説

$\dfrac{3x}{x+2}=-\dfrac{6}{x+2}+3$

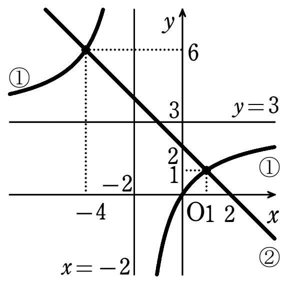
よって，関数 $y=\dfrac{3x}{x+2}$ は

$y=-\dfrac{6}{x+2}+3$

と表され，

$y=\dfrac{3x}{x+2}$　…… ①，$y=-x+2$　…… ②

のグラフをかくと，右の図のようになる。




(1) 方程式　$\dfrac{3x}{x+2}=-x+2$　…… ③　とする。

③ の両辺に $x+2$ を掛けると　$3x=-(x-2)(x+2)$

整理して　$x^2+3x-4=0$　　よって　$(x+4)(x-1)=0$

これを解いて　$x=-4,\ 1$

これらは ① と ② のグラフの共有点の $x$ 座標で，③ の解である。

(2) 不等式 $\dfrac{3x}{x+2}<-x+2$ を満たす $x$ の値の範囲は，① のグラフが直線 ② より下側にあるような $x$ の値の範囲である。

よって，図から　$x<-4$，$-2<x<1$

[問3]

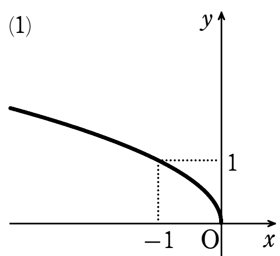
解答 $x$ 軸に関して対称

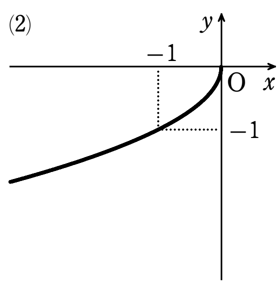
解説

点 $(x,\ y)$ が関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフ上にあるとき，点 $(x,\ -y)$ は関数 $y=-\sqrt{x}$ のグラフ上にある。
点 $(x,\ y)$ と点 $(x,\ -y)$ は $x$ 軸に関して対称であるから，関数 $y=-\sqrt{x}$ のグラフは，関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと $x$ 軸に関して対称な位置にある。

[練習6]

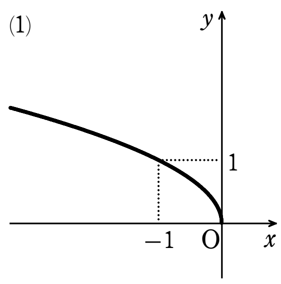
解答 (1) [図]，$y$ 軸に関して対称　(2) [図]，原点に関して対称



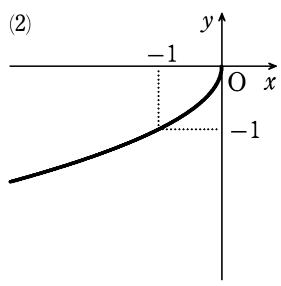




解説

(1) 点 $(x,\ y)$ が関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフ上にあるとき，
点 $(-x,\ y)$ は関数 $y=\sqrt{-x}$ のグラフ上にある。
点 $(x,\ y)$ と点 $(-x,\ y)$ は $y$ 軸に関して対称であるから，関数 $y=\sqrt{-x}$ のグラフは，関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと $y$ 軸に関して対称な位置にある。




(2) 点 $(x,\ y)$ が関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフ上にあるとき，
点 $(-x,\ -y)$ は関数 $y=-\sqrt{-x}$ のグラフ上にある。
点 $(x,\ y)$ と点 $(-x,\ -y)$ は原点に関して対称であるから，関数 $y=-\sqrt{-x}$ のグラフは，関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと原点に関して対称な位置にある。

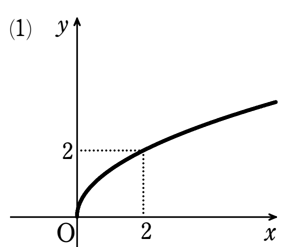



[練習7]

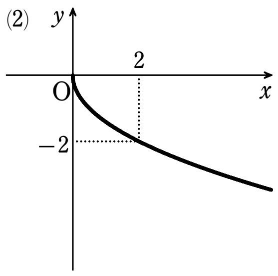
解答 (1) [図]，定義域 $x\geqq0$，値域 $y\geqq0$

(2) [図]，定義域 $x\geqq0$，値域 $y\leqq0$

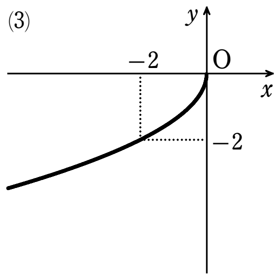
(3) [図]，定義域 $x\leqq0$，値域 $y\leqq0$



(2)




(3)




解説

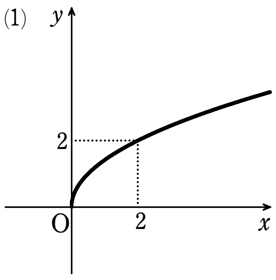
定義域，値域の順に

(1)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$

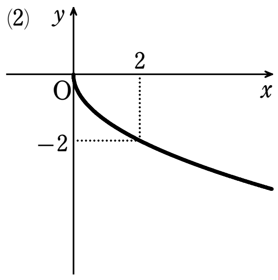
(2)　$x \geqq 0$，$y \leqq 0$

(3)　$x \leqq 0$，$y \leqq 0$

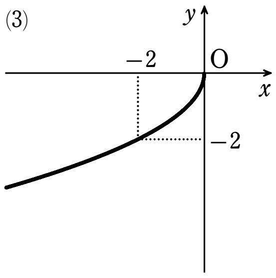
(1)




(2)




(3)

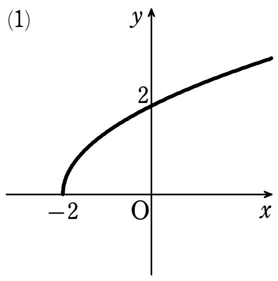



[練習8]

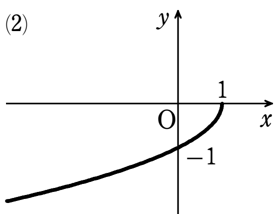
解答　(1)　[図]，定義域 $x \geqq -2$，値域 $y \geqq 0$

　　　(2)　[図]，定義域 $x \leqq 1$，値域 $y \leqq 0$

(1)




(2)




解説

(1)　$\sqrt{2x+4}=\sqrt{2(x+2)}$

　であるから，求めるグラフは，関数

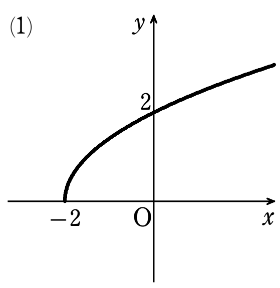
　$y=\sqrt{2x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $-2$ だけ

　平行移動したもので，右の図のようになる。

　また，定義域は $x \geqq -2$，値域は $y \geqq 0$ で

　ある。

(1)




(2)　$-\sqrt{1-x}=-\sqrt{-(x-1)}$

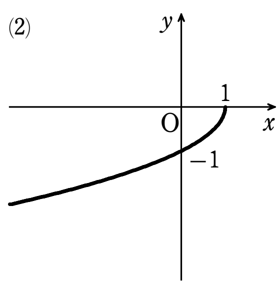
　であるから，求めるグラフは，関数

　$y=-\sqrt{-x}$ のグラフを $x$ 軸方向に 1 だけ

　平行移動したもので，右の図のようになる。

　また，定義域は $x \leqq 1$，値域は $y \leqq 0$ である。

(2)




[問4]

解答　$1 \leqq y \leqq \sqrt{5}$

解説

　　$x=-1$ のとき　　$y=1$

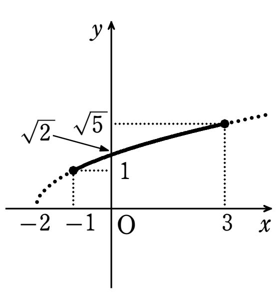
　　$x=3$　 のとき　　$y=\sqrt{5}$

であり，この関数のグラフは右の図の実線部分で

ある。

よって，この関数の値域は

　　$1 \leqq y \leqq \sqrt{5}$




[練習9]

解答　$\sqrt{3}<y \leqq 3$

解説

$\sqrt{6-3x}=\sqrt{-3(x-2)}$ であるから

　　$x=-1$ のとき　　$y=3$

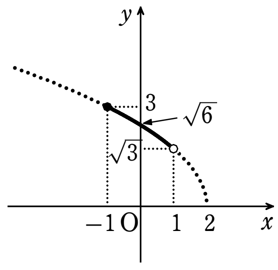
　　$x=1$　 のとき　　$y=\sqrt{3}$

ゆえに，この関数のグラフは右の図の実線部分で

ある。

よって，この関数の値域は

　　$\sqrt{3}<y \leqq 3$




[練習10]

解答　(1)　(3，3)　　(2)　(1，1)，(5，3)

解説

(1)　方程式　$\sqrt{2x+3}=x$　…… ①

　の解が共有点の $x$ 座標である。

　① の両辺を 2 乗すると　　$2x+3=x^2$

　移項して　　　$x^2-2x-3=0$

　これを解いて　　$x=-1$，3

　$x=-1$ のとき，① において

　　　左辺 $=\sqrt{-2+3}=1$，右辺 $=-1$

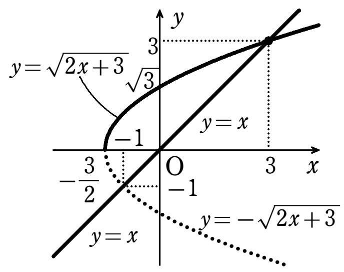
　よって，$x=-1$ は ① を満たさない。

　$x=3$ のとき，① において

　　　左辺 $=\sqrt{6+3}=3$，右辺 $=3$

　よって，$x=3$ は ① を満たし，このとき　　$y=3$

　したがって，共有点の座標は　　(3，3)




(2)　方程式　$\sqrt{2x-1}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$　…… ①

　の解が共有点の $x$ 座標である。

　① の両辺を 2 乗して整理すると

　　　$x^2-6x+5=0$

　これを解いて　　$x=1$，5

　$x=1$ のとき，① において

　　　左辺 $=\sqrt{2-1}=1$，右辺 $=1$

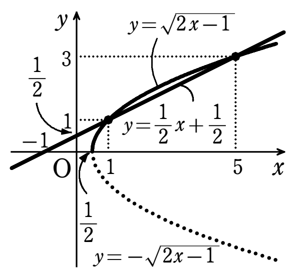
　よって，$x=1$ は ① を満たし，このとき　　$y=1$

　$x=5$ のとき，① において

　　　左辺 $=\sqrt{10-1}=3$，右辺 $=3$

　よって，$x=5$ は ① を満たし，このとき　　$y=3$

　したがって，共有点の座標は　　(1，1)，(5，3)




[問5]

解答　$-2 \leqq x<2$

解説

　　$y=\sqrt{x+2}$　…… ①，$y=x$　…… ②

とすると，関数 ① のグラフと直線 ② の共有点の $x$ 座

標は，方程式

　　$\sqrt{x+2}=x$　…… ③

の解である。

③ の両辺を 2 乗すると　　$x+2=x^2$

移項して　　　$x^2-x-2=0$

これを解いて　　$x=-1$，2

$x=-1$ のとき，③ において

　　左辺 $=\sqrt{-1+2}=1$，右辺 $=-1$

ゆえに，$x=-1$ は ③ を満たさない。

$x=2$ のとき，③ において

　　左辺 $=\sqrt{2+2}=2$，右辺 $=2$

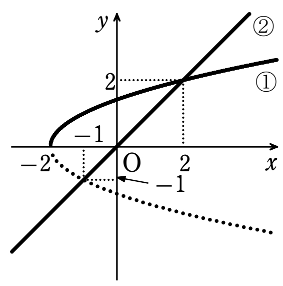
ゆえに，$x=2$ は ③ を満たす。

よって，方程式 ③ の解は　　$x=2$

求める $x$ の値の範囲は，関数 ① のグラフが直線 ② より上側にあるような $x$ の値の範囲

である。

したがって，図から　　$-2 \leqq x<2$



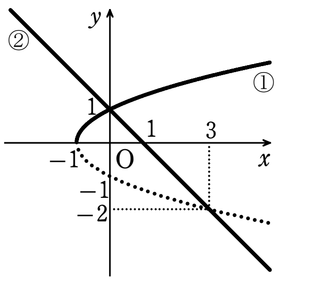

[練習11]

解答　(1)　$x=0$　　(2)　$-1 \leqq x<0$

解説

$y=\sqrt{x+1}$ ……①，$y=-x+1$ ……②

のグラフをかくと，右の図のようになる。




(1)　方程式　$\sqrt{x+1}=-x+1$ ……③

の両辺を 2 乗すると

$x+1=x^2-2x+1$

整理すると　　$x^2-3x=0$

これを解いて　　$x=0,\ 3$

$x=0$ のとき，③ において

左辺$=\sqrt{0+1}=1$，右辺$=1$

ゆえに，$x=0$ は ③ を満たす。

$x=3$ のとき，③ において

左辺$=\sqrt{3+1}=2$，右辺$=-2$

ゆえに，$x=3$ は ③ を満たさない。

よって，方程式 ③ の解は　　$x=0$

(2)　不等式 $\sqrt{x+1}<-x+1$ を満たす $x$ の値の範囲は，関数 ① のグラフが直線 ② より下側にあるような $x$ の値の範囲である。

よって，図から　　$-1\leqq x<0$

［練習12］

解答　(1)　$y=2x+4$　　(2)　$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$

解説

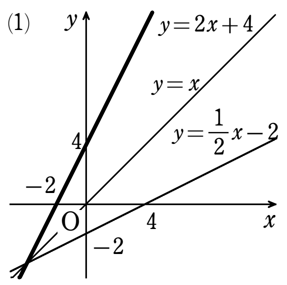
(1)　$y=\dfrac{1}{2}x-2$ を $x$ について解くと　　$x=2y+4$

よって，逆関数は，$x$ と $y$ を入れ替えて　　$y=2x+4$

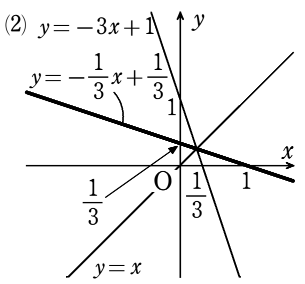
(2)　$y=-3x+1$ を $x$ について解くと　　$x=-\dfrac{y-1}{3}$

よって，逆関数は，$x$ と $y$ を入れ替えて　　$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$

参考　(1)




(2)




［練習13］

解答　$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$　$(-2\leqq x\leqq 7)$

解説

この関数の値域は

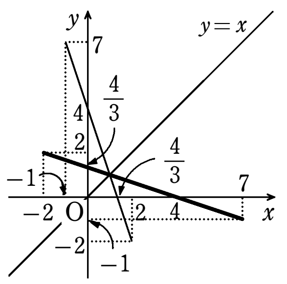
$-2\leqq y\leqq 7$

$y=-3x+4$ を $x$ について解くと

$x=-\dfrac{1}{3}y+\dfrac{4}{3}$　$(-2\leqq y\leqq 7)$

よって，逆関数は，$x$ と $y$ を入れ替えて

$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$　$(-2\leqq x\leqq 7)$




［練習14］

解答　(1)　$y=-\sqrt{x}$　　(2)　$y=\sqrt{x+2}$

解説

(1)　関数 $y=x^2\ (x\leqq 0)$ の値域は $y\geqq 0$ である。

$y=x^2$ を $x$ について解くと，$x\leqq 0$ であるから　　$x=-\sqrt{y}$　$(y\geqq 0)$

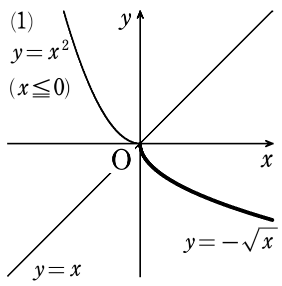
よって，逆関数は，$x$ と $y$ を入れ替えて　　$y=-\sqrt{x}$

(2)　関数 $y=x^2-2\ (x\geqq 0)$ の値域は $y\geqq -2$ である。

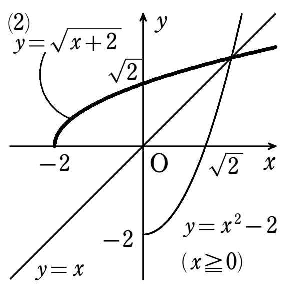
$y=x^2-2$ を $x$ について解くと，$x\geqq 0$ であるから　　$x=\sqrt{y+2}$　$(y\geqq -2)$

よって，逆関数は，$x$ と $y$ を入れ替えて　　$y=\sqrt{x+2}$

参考　(1)




(2)




［練習15］

解答　(1)　$y=-\dfrac{x-1}{x-2}$　　(2)　$y=\dfrac{3x+4}{x+1}$

解説

(1)　$\dfrac{2x+1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+2$ であるから，関数 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ の値域は $y\fallingdotseq 2$ である。

$y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ を変形すると，$y(x+1)=2x+1$ より　　$x(y-2)=-y+1$

$y\fallingdotseq 2$ であるから　　$x=-\dfrac{y-1}{y-2}$

よって，逆関数は，$x$ と $y$ を入れ替えて　　$y=-\dfrac{x-1}{x-2}$

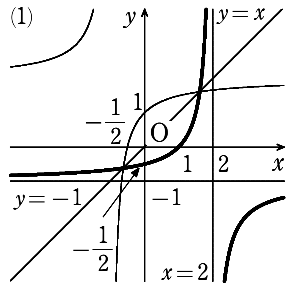
(2)　$\dfrac{-x+4}{x-3}=\dfrac{1}{x-3}-1$ であるから，関数 $y=\dfrac{-x+4}{x-3}$ の値域は $y\fallingdotseq -1$ である。

$y=\dfrac{-x+4}{x-3}$ を変形すると，$y(x-3)=-x+4$ より　　$x(y+1)=3y+4$

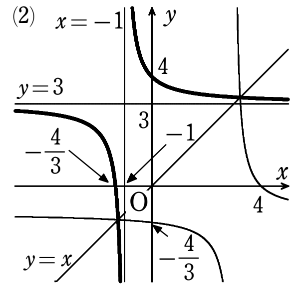
$y\fallingdotseq -1$ であるから　　$x=\dfrac{3y+4}{y+1}$

よって，逆関数は，$x$ と $y$ を入れ替えて　　$y=\dfrac{3x+4}{x+1}$

参考　(1)




(2)




［練習16］

解答　$a=2,\ b=-1$

解説

$f(3)=5$ から　　$3a+b=5$ ……①

また，$f^{-1}(3)=2$ のとき $f(2)=3$ であるから

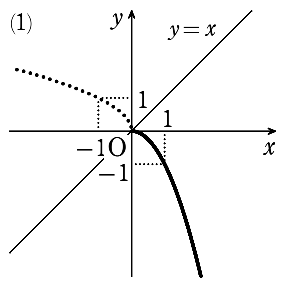
$2a+b=3$ ……②

①，② から　　$a=2,\ b=-1$

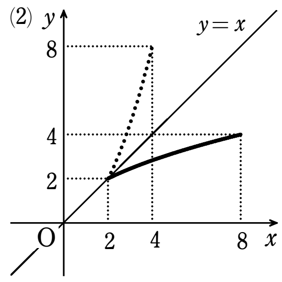
［練習17］

解答　(1)　$y=-x^2\ (x\geqq 0)$，［図］　　(2)　$y=\sqrt{2x}\ (2\leqq x\leqq 8)$，［図］

(1)




(2)




解説

(1)　関数 $y=\sqrt{-x}$ の値域は　　$y\geqq 0$

$y=\sqrt{-x}$ を $x$ について解くと

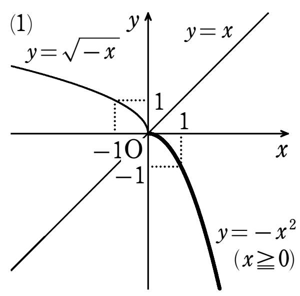
$x=-y^2$　$(y\geqq 0)$

よって，逆関数は，$x$ と $y$ を入れ替えて

$y=-x^2$　$(x\geqq 0)$

グラフは右の図のようになる。

(1)




(2)　関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2\ (2\leqq x\leqq 4)$ の値域は

$2\leqq y\leqq 8$

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ を $x$ について解くと，$x>0$ から

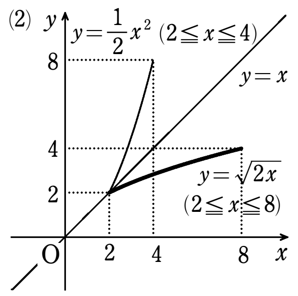
$x=\sqrt{2y}$　$(2\leqq y\leqq 8)$

よって，逆関数は，$x$ と $y$ を入れ替えて

$y=\sqrt{2x}$　$(2\leqq x\leqq 8)$

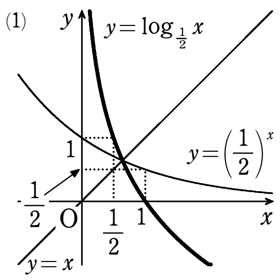
グラフは右の図のようになる。

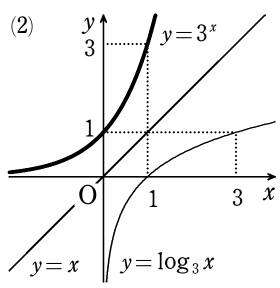
(2)

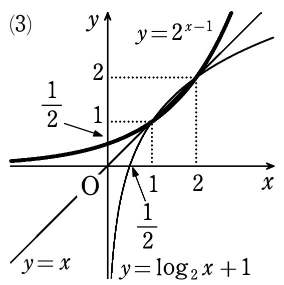



［練習18］

解答　(1)　$y=\log_{\frac{1}{2}}x$，［図］　　(2)　$y=3^x$，［図］　　(3)　$y=2^{x-1}$，［図］




(解説)

(1)　関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ の値域は $y>0$ である。

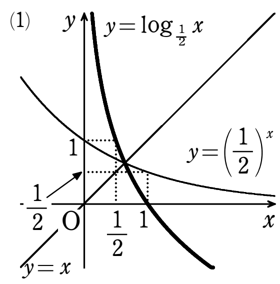
$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ を $x$ について解くと

$$x=\log_{\frac{1}{2}}y \quad (y>0)$$

よって，逆関数は，$x$ と $y$ を入れ替えて

$$y=\log_{\frac{1}{2}}x$$

グラフは右の図のようになる。




(2)　関数 $y=\log_3 x$ の値域は，すべての実数である。

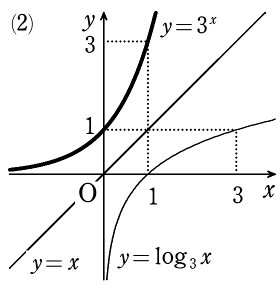
$y=\log_3 x$ を $x$ について解くと

$$x=3^y$$

よって，逆関数は，$x$ と $y$ を入れ替えて

$$y=3^x$$

グラフは右の図のようになる。




(3)　関数 $y=\log_2 x+1$ の値域は，すべての実数である。

$y=\log_2 x+1$ を $x$ について解くと，

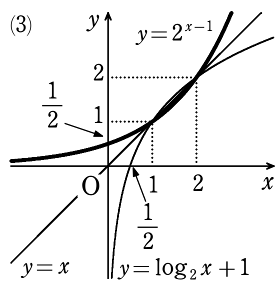
$y-1=\log_2 x$ から

$$x=2^{y-1}$$

よって，逆関数は，$x$ と $y$ を入れ替えて

$$y=2^{x-1}$$

グラフは右の図のようになる。




［練習19］

解答　(1)　$(g\circ f)(x)=|x+1|+1$　　(2)　$(f\circ g)(x)=|x|+2$

(3)　$(h\circ g)(x)=\log_2(|x|+1)$

(解説)

(1)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=|x+1|+1$

(2)　$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(|x|+1)+1=|x|+2$

(3)　$(h\circ g)(x)=h(g(x))=\log_2(|x|+1)$